FI.CO. 1

(Fisica Comprensibile per geologi)

Programma di Fisica 1 - (v.4.0-99)

Autore Adriano Nardi

00 - ARGOMENTO
Introduzione all argomento con breve spiegazione generale del tema in esame.

Argomento Specifico

- LEGGE O TEOREMA:

enunciato e spiegazione del significato. Eventuale dimostrazione:

$A = B \cdot C^2$ (formula applicata)
$C = V_{luce}$ *spiegazione del calcolo...*

$\boxed{E = MC^2}$ **Formula ottenuta**

♣ Ulteriore chiarimento o suggerimento.

1 - MOTO 1D

Il moto unidimensionale, ovvero lungo una linea retta, puo essere descritto da un equazione contenente i parametri del movimento (equazione cinematica).

- EQUAZIONI CINEMATICHE: se si considera <u>costante</u> l accelerazione, quattro equazioni cinematiche possono descrivere il moto di un corpo in una dimensione:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v-v_0}{t-t_0} = \frac{v-v_0}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a \cdot t}$$

$t_0=0$

Equazione Cinematica (1)

$$\begin{cases} v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x-x_0}{t} & \text{(velocita media per definizione)} \\ v_m = \dfrac{v_0+v}{2} & \text{(velocita basata su media aritmetica)} \end{cases}$$

risolvendo l uguaglianza...

$$\frac{x-x_0}{t} = \frac{v_0+v}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x-x_0 = \_\ (v_0+v)\ t}$$

Equazione Cinematica (2)

$$\begin{cases} v = v_0 + a \cdot t & \text{(eq. cinematica 1)} \\ x-x_0 = \_\ (v_0+v)\ t & \text{(eq. cinematica 2)} \end{cases}$$

sostituendo la (1) nella (2)...

$$x-x_0 = \_\ (v_0+v_0+a \cdot t)\ t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x-x_0 = v_0 \cdot t + \_\ a \cdot t^2}$$

Equazione Cinematica (3)

$$\begin{cases} t = \dfrac{v-v_0}{a} & \text{(dall eq. cinematica 1)} \\ x-x_0 = \_\ (v_0+v)\ t & \text{(eq. cinematica 2)} \end{cases}$$

sostituendo t *nella (2)...*

$$x-x_0 = \_\ (v_0+v)\ \frac{v-v_0}{a} = \frac{v^2-v_0^2}{2\,a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\,(x-x_0)}$$

Equazione Cinematica (4)

♣ In caso di un corpo in caduta libera: $a = -g$

♣ Per trovare la max altezza di un corpo lanciato in aria: usare la (3) con $v_0 = 0$ e $a = -g$

2 - MOTO 2D

♣ Il moto di una particella su di un piano di dimensioni X,Y puo essere descritto scomponendo ogni parametro nelle componenti unidimensionali X e Y ed applicando ad esse le precedenti equazioni cinematiche.

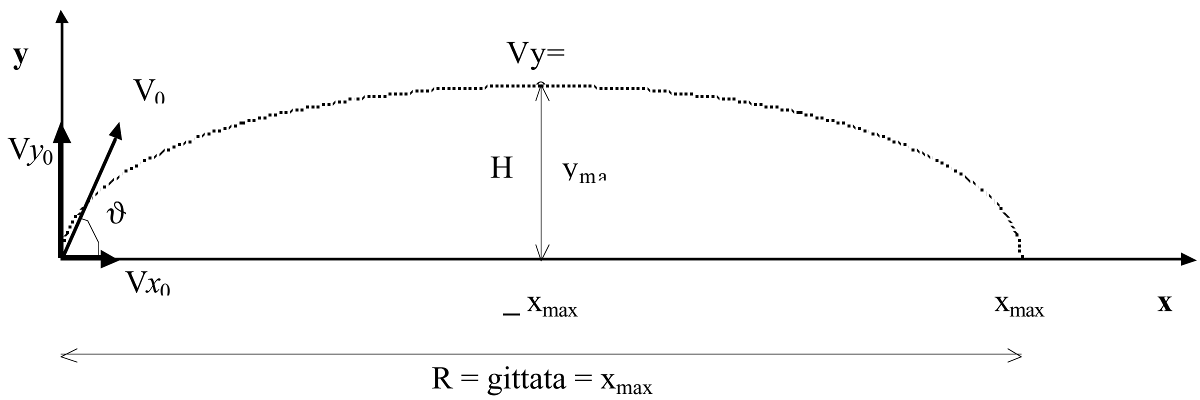
Moto di un proiettile

Per descrivere con semplicita il moto bidimensionale di un proiettile occorre fare tre approssimazioni:

1. g = Costante. In realta g varia con il quadrato della distanza dal centro della Terra (vedere legge di Newton);
2. Resistenza dell aria = 0. In realta esiste sempre un attrito con l aria;
3. La rotazione terrestre e ininfluente. In realta la rotazione terrestre genera una forza fittizia deviante o Forza di Coriolis .

Se si accettano queste premesse, il moto di un proiettile puo essere descritto con una semplice traiettoria parabolica. La velocita e la posizione ad ogni istante potranno essere calcolati separatamente nelle componenti X e Y con le equazioni cinematiche unidimensionali tenendo conto che:

1. $a = -g$ (il segno di g e negativo perche punta verso il basso mentre Y cresce verso l alto);
2. g e verticale e quindi a agisce solo nella componente Y



- VELOCITA : **Vx** = $(Vx)_0$ = $V_0 \cos\vartheta$ = *costante in qualsiasi istante* **Componente X di V**
  Vy = $(Vy)_0 + a\cdot t$ = $V_0 \operatorname{sen}\vartheta - g\cdot t$ **Componente Y di V**

- POSIZIONE: *dalla def. di velocita :* $V = \Delta x/t \Rightarrow \Delta x = V\cdot t$
  X = $(Vx)_0\cdot t = (V_0 \cos\vartheta)\, t$ **Posizione lungo X**
  dalle eq. cinematiche: $\Delta y = V\cdot t + \_\, a\cdot t^2$
  Y = $(Vy)_0\cdot t - \_\, g\cdot t^2 = (V_0 \operatorname{sen}\vartheta)\, t - \_\, g\cdot t^2$ **Posizione lungo Y**

- E INOLTRE: **Y** = $x \cdot Tg\vartheta - (g/2V_0^2 \cos^2\vartheta)\, x^2$ (Posizione Y espressa senza il tempo ottenuta componendo le equazioni di posizione X e Y. Vale per $\vartheta < \pi/2$)

  V = $\sqrt{Vx^2 + Vy^2}$ (Il modulo della velocita o *rapidita* ottenuto con il teorema di Pitagora dalle componenti X,Y)

  Tgϑ = Vy/Vx (Il vettore V e sempre tangente alla traiettoria quindi l angolo di tiro equivale alla pendenza di V)

  $\mathbf{H_{max}}$ = $V^2 sen^2\vartheta/2g$ (Quando il proiettile raggiunge l H_{max} si avranno: Vy = 0, X = R/2 e t = _ t_{max}. La formula si ottiene ricavando t dall eq. di Vy e sostituendolo nell eq. di Y)

  R = $V_0^2 sen2\vartheta/g$ (Quando X = gittata max, si avranno: Y = 0 e t = t_{max})

  $\mathbf{T_1}$ = $V_0 sen\vartheta/g$ (Istante in cui il proiettile e alla max altezza; equivale a _ del tempo totale)

♣ La gittata max (**R**) si ha sempre per ϑ = 45°

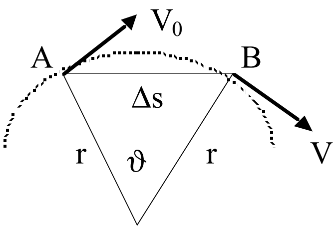
Moto Circolare Uniforme

♣ Nel moto circolare uniforme la velocita e costante. Come puo esistere allora un accelerazione? L accelerazione in questo caso e dovuta non alla variazione del modulo di V ma alla continua variazione nella direzione del vettore V.

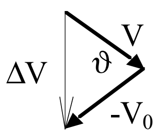
a = $V-V_0 / t-t_0 = \Delta V / \Delta t$ **Accelerazione Tangenziale** (dovuta alla variazione del modulo di V cioe della *rapidita*)

$\mathbf{a_r}$ = V^2 / r **Accelerazione Centripeta** (dovuta alla variazione della direzione del vettore V)

- COME SI OTTIENE IL VALORE DELL ACCELERAZIONE CENTRIPETA:



$\mathbf{\Delta V = V\text{-}V_0}$



In questi disegni abbiamo due triangoli simili essendo isosceli e con lo stesso angolo tra i lati uguali. Di conseguenza possiamo dire che

$\Delta V / V = \Delta s / r$ e quindi che:

$\Delta V = V\Delta s / r$

Sapendo che $a = \mathbf{\Delta V} / \Delta t \Rightarrow a = \frac{V}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ma per $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta s/\Delta t = V$ e quindi $\boxed{\mathbf{a}_r = V^2/r}$

inoltre per $\Delta t \rightarrow 0$ e quindi $\Delta s \rightarrow 0$ i vettori V e V_0 tendono ad essere paralleli mentre il ΔV tende ad essere perpendicolare ad essi conferendo la direzione perpendicolare anche al vettore **a** che vettorialmente dipende solo da ΔV.

♣ Qui il moto circolare e visto semplicemente come uno dei possibili moti bidimensionali di una particella. Un maggiore sviluppo della cinematica rotazionale si puo trovare nei capitoli successivi a proposito delle *leggi del moto* e del *moto rotatorio di un corpo*.

3 - LEGGI DEL MOTO

I Principio della Dinamica

Un oggetto rimane in quiete o in moto uniforme (V = costante, a = 0) finche non si esercita su di esso una forza esterna.

♣ L azione di una forza su di un corpo e cio che gli conferisce un accelerazione. Se non agiscono su di esso delle forze esterne la sua accelerazione e zero ($\Sigma F=0 \Rightarrow a=0$).

- RIFERIMENTO INERZIALE: riferimento rispetto al quale un corpo non sottoposto all azione di forze esterne si muove con V=costante e a=0. E inerziale un riferimento in quiete o in moto rettilineo uniforme, ovvero un riferimento estraneo al sistema. Un riferimento non inerziale e un riferimento in moto vario rispetto al corpo osservato e quindi fonte di forze fittizie che sembreranno agire sul corpo stesso. Un riferimento interno al sistema osservato non e inerziale.
- MASSA E INERZIA: se si tenta di mutare lo stato di moto di un corpo, esso opporra una resistenza. La tendenza a rimanere nel suo stato di quiete o di moto uniforme e l **inerzia**. La **massa** di un corpo e la misura della sua inerzia.

II Principio della Dinamica

L accelerazione di un corpo e direttamente proporzionale alla forza esercitata su di esso e inversamente proporzionale alla sua massa.

$\mathbf{a} = \Sigma F / m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma \mathbf{F} = m \cdot a}$

- MASSA E FORZA PESO: m = massa ; F = ma
  se $a = g \Rightarrow mg = F =$ Forza Peso
  la **massa** m di un corpo e costante, il **peso** (F = mg) dipende da g.
- DIMENSIONI E UNITA DI UNA FORZA: $F = m \cdot a$
  $1\ N = 1\ Kg \cdot m/s^2$ SI

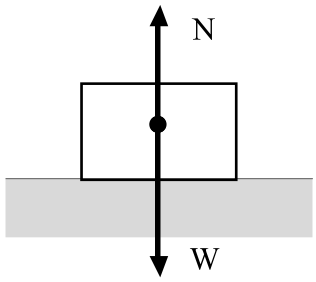
1 dyna = 1 g · cm/s^2 cgs

III Principio della Dinamica

Quando due corpi A e B interagiscono, la forza esercitata da A su B sara uguale in modulo e di verso contrario alla forza esercitata da B su A.

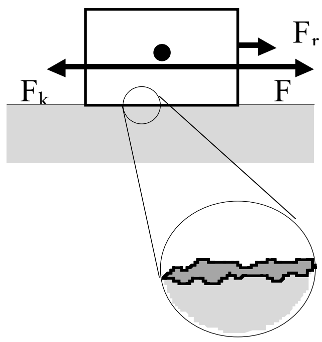
$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$

Esempio: alla forza peso W si oppone il sostegno del suolo N.
W = m·g = N



- FORZA DI ATTRITO: resistenza al moto di un corpo causata dallo scivolamento su di una superficie scabra o dall attraversamento di un mezzo viscoso.

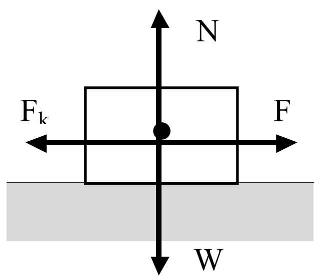
Esempio: applicando al corpo una forza F crescente , comparira una forza F_k e solo quando |F| supera $|F_k|$ il corpo si muove sotto l azione della forza residua $F_r = |F-F_k|$ accelerando verso destra.



♣ Bisogna fare molta attenzione a una cosa: F_k e la forza di attrito ed esiste solo quando applico la forza F. L attrito pero e dovuto alla forza peso W e quindi l entita di F_k dipende da W e non da F.

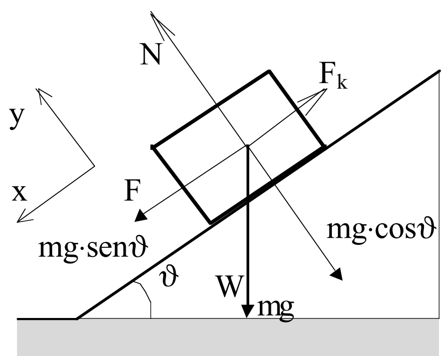
$\boxed{\mathbf{F_k} = \mu \cdot N}$ N = W $\Rightarrow$ $\mathbf{F_k} = \mu \cdot mg$

μ = coefficiente di attrito, dipende dalla natura delle superfici a contatto. Valori tipici: 0,05 per superfici levigate
1,5 per superfici scabre
0.3 tipica negli esercizi



- FORZA DI ATTRITO SU PIANO INCLINATO: in questo caso il corpo, sottoposto alla forza peso (mg), si sposta lungo il piano influenzato dalla componente X del suo peso (mg·senϑ). Si oppone a questo movimento la forza di attrito $F_k = \mu N$. N in questa situazione e uguale e contraria alla componente Y della forza peso. Dunque si avra :

  * Forza principale: W = mg (Forza Peso)
  * Forza agente lungo il piano: F = mg·senϑ (componente X di W)
  * Forza di attrito: $F_k = \mu N = \mu \cdot mg \cdot \cos\vartheta$
  * Forza risultante: $F - F_k = \Sigma F = ma$



♣ Suggerimento: disegnare sempre il diagramma di corpo libero.

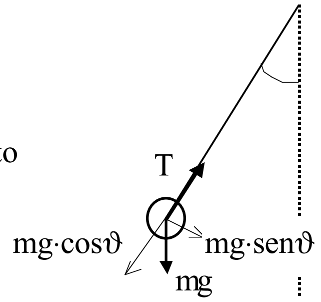
- II PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL MOTO CIRCOLARE:

$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ a_r = V^2/r \end{array}\right\} \quad \boxed{\mathbf{F_r} = mV^2 / r}$$

Forza centripeta

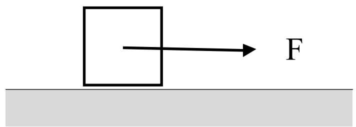
♣ La forza centripeta e rivolta costantemente verso il centro di rotazione provocando una costante variazione nella direzione della velocita , cosa che mantiene una costante accelerazione.
♣ Il Moto Circolare Uniforme si puo mantenere solo in presenza di una forza centripeta costante (vincolo, gravita , attrito)

- MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME: moto vincolato su cui agisce una forza esterna (vedi avanti il Pendolo).
  T = Tensione = Forza centripeta

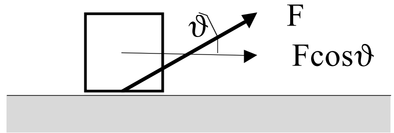


4 - LAVORO

1) IL LAVORO ESEGUITO DA UNA FORZA COSTANTE e definito come il prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento per il modulo dello spostamento stesso: $W = (F\cos\vartheta)\, s$



$\mathbf{W} = F \cdot s$



$\mathbf{W} = (F\cos\vartheta)\, s$

♣ Se una forza agente su di un corpo non produce spostamento, essa non esegue lavoro su di esso.
♣ Una forza ⊥ alla direzione dello spostamento non produce lavoro.
♣ In pratica il lavoro e il PRODOTTO SCALARE DI FORZA PER SPOSTAMENTO.
(Per il prodotto scalare vedi Cap.00).

2) IL SEGNO DEL LAVORO dipende dalla direzione del vettore F rispetto al vettore S (positivo se concordi, negativo se discordi)
♣ Il lavoro compiuto dall attrito (F_k) e negativo: $W_{Fk} = - F_k \cdot S$
♣ Poiche il lavoro e una grandezza scalare: $W_{tot} = \Sigma\, W$

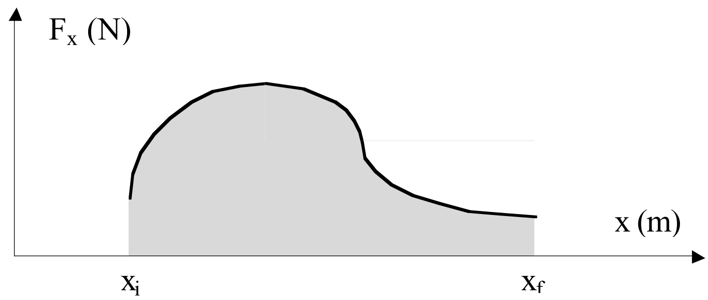
3) DIMENSIONE E UNITA DEL LAVORO: l unita di misura del lavoro e il Joule

$$1\,J = N \cdot m \qquad (SI)$$

1erg = dyne · cm (cgs) $1J = 10^7$ ergs

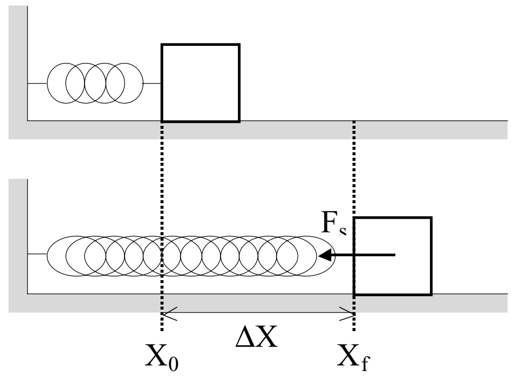
4) LAVORO PRODOTTO DA UNA FORZA VARIABILE:

$$\boxed{\mathbf{W} = \int_{xi}^{xf} F_x \; dx}$$



♣ Questa espressione e fondamentale e verra ripresa in Termodinamica.

Lavoro eseguito da una MOLLA



- FORZA ESERCITATA DA UNA MOLLA:
  $\mathbf{F_s} = -k \, \Delta x$
  dove: k = *costante elastica* = costante positiva

♣ F e negativa se Δx e positivo

- LAVORO ESEGUITO DA UNA MOLLA :

$$\mathbf{W_s} = \int_{xi}^{xf} (-kx)\,dx = \int_0^{-x} (-kx)\,dx = -k \int_0^{-x} x\,dx =$$

↑ (xi=0 perche e il punto di

$$= -k \left[x^2/2\right]_0^{-x} = -\_\, kx^2 - 0 = \boxed{-\_\, k\Delta x^2}$$

Lavoro eseguito dalla molla durante la trazione

♣ Il lavoro eseguito dalla molla *durante* la trazione iniziale e negativo perche la forza della molla (F_s) sara uguale e contraria alla direzione dello spostamento. [$W(ml_1) = -\_\, k\,\Delta x^2$]

♣ Il lavoro eseguito dalla forza agente, sempre *durante* la trazione, e uguale e di segno opposto rispetto al lavoro svolto dalla molla. [$W(f_{ag}) = \_\, k\,\Delta x^2$]

♣ Il lavoro eseguito successivamente dalla molla (per tornare in quiete) sara invece positivo perche concorde con lo spostamento. [$W(ml_2) = \_\, k\,\Delta x^2$]

♣ Il lavoro totale eseguito dalla molla e dunque 0. [$W(ml_{tot}) = 0$]

Lavoro ed Energia Cinetica

$W = F \cdot s$ (lavoro*)

$F = m \cdot a$ (II princ. dinamica) *quindi possiamo scrivere:* $\mathbf{W} = m \cdot a \cdot s$

ma sappiamo anche che:

$s = \Delta x = \_\,(V_0+V)\,t$ (eq. cinematica)

$a = (V-V_0)\,/\,t$ (def. di accelerazione) *possiamo sostituire a ed s nella precedente...*

$\mathbf{W} = m\,[(V-V_0)\,/\,t]\,[\_\,(V_0+V)\,t]$ *da cui semplificando...*

$\mathbf{W} = \_\,m \cdot V^2 - \_\,m \cdot V_0^2$

Si definisce $\boxed{\mathbf{K} = \_\,m \cdot V^2}$ l energia cinetica di una particella cioe l energia associata al movimento di un corpo.

Il lavoro eseguito da una forza nello spostare un corpo si puo esprimere come la variazione di energia cinetica del corpo:

$\boxed{\mathbf{W} = \_\,m \cdot V^2 - \_\,m \cdot V_0^2 = K - K_0 = \mathbf{\Delta K}}$ **Teorema dell energia cinetica**

♣ (*) - Lo stesso si puo ottenere anche partendo dal lavoro di forza variabile (integrale gia visto) in cui sostituiamo ad F la forza esercitata da una molla (che appunto e una forza variabile). Si consiglia di svolgerlo come esercizio perche e una tipica domanda d esame.

- DIMENSIONE E MISURA DELL ENERGIA CINETICA: K e una grandezza scalare con la stessa unita di misura del lavoro (J)

- K IN FUNZIONE DELLA QUANTITA DI MOTO:
  poiche $P = mV$ possiamo scrivere $K = \_\,m \cdot V^2 = (mV)^2\,/\,2m = P^2\,/\,2m$ cioe $\boxed{\mathbf{K} = P^2/2m}$

♣ La velocita e quindi l energia cinetica di un corpo variano quando una forza esterna esegue lavoro sul corpo stesso.

Potenza

Si definisce potenza la rapidita con cui il lavoro viene eseguito

$\boxed{\mathbf{P} = \Delta W\,/\,\Delta t}$ **Potenza Media**

$P = \mathit{lim}\,(\Delta t \to 0)\;\Delta W\,/\,\Delta t = dW\,/\,dt$ ma: $dW = F\,dS$ *quindi possiamo scrivere...*

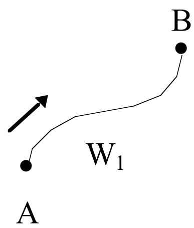
$P = dW\,/\,dt = F\,(dS/dt)$ ma: $dS/dt = V$ *quindi sostituendo otteniamo...*

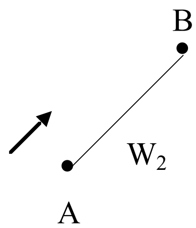
$\boxed{\mathbf{P} = F \cdot V}$ **Potenza Istantanea**

- DIMENSIONE E MISURA DELLA POTENZA: la misura della potenza e il Watt
  $1W = 1J/sec$ [SI] $= 1Kg \cdot (m^2/sec^2)$ [cgs]

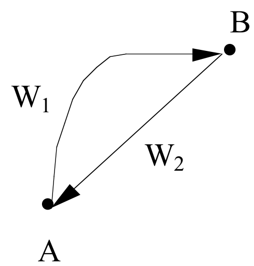
5 - CONSERVAZIONE DELL ENERGIA

- FORZE CONSERVATIVE:
  - ◊ Una forza e conservativa se il lavoro che compie su una particella e indipendente dal percorso da essa seguito.
  - ◊ Il lavoro compiuto da una forza conservativa su una particella e nullo se il percorso e chiuso e la particella torna al punto di partenza.





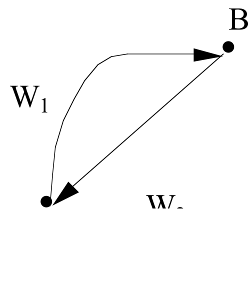
Se la forza e conservativa
$W_1 = W_2$



Se la forza e conservativa
$W_{tot} = 0$

$W_1 = -W_2$
$W_{tot} = W_1 + W_2 = 0$

- FORZE NON CONSERVATIVE:
  una forza non e conservativa se il lavoro che compie su una particella dipende dalla traiettoria di questa (presenza di attrito). Viene detta anche forza dissipativa perche parte di essa si disperde durante l azione.



$W_1 > W_2$

Il percorso piu lungo causa una

In presenza di
attrito con il suolo:

- LAVORO DI UNA FORZA CONSERVATIVA: dipende dalle condizioni iniziali e finali, quindi si avra : $W_c = U_0 - U = -\Delta U$ cioe il lavoro di una forza conservativa equivale alla variazione di Energia Potenziale cambiata di segno.

$\mathbf{W_c} = -\Delta U$
$\Delta\mathbf{U} = -\int Fx\,dx$

- CONSERVAZIONE DELL ENERGIA MECCANICA:

$W_{tot} = \Delta K$ (teorema dell energia cinetica)
$W_c = -\Delta U$ (lavoro di una forza conservativa) *quindi nel caso di una forza conservativa:*

$\Delta K = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta K + \Delta U = \Delta(K+U) = 0$

$\boxed{\mathbf{K_0+U_0 = K+U}}$ **Legge della conservazione dell energia meccanica**

♣ L energia meccanica di un sistema rimane costante se la sola forza che compie lavoro e conservativa:

$\mathbf{E_0 = E}$ dove $E = K+U$

- CONSERVAZIONE DELL ENERGIA IN UN CORPO IN CADUTA LIBERA:
$W = F\cdot s$ ma $F = ma$ e inoltre, nel caso di caduta libera, $a = g$ e $s = \Delta y$, quindi si avra ...

$\mathbf{W_g} = mg\Delta y$ **Lavoro eseguito dalla forza di gravita**

$W_g = mgy_0 - mgy$ (lo abbiamo visto ora)
$W_g = U_0 - U$ (perche il la forza di gravita e conservativa) *quindi possiamo scrivere...*

$\mathbf{U_g} = mgy$ **Energia Potenziale Gravitazionale**

Applicando il teorema della conservazione dell energia meccanica otteniamo dunque...

$\boxed{\_\,mV_0^2 + mgh_0 = \_\,mV^2 + mgh}$ **Conservazione dell energia meccanica in un corpo in caduta libera**

- LAVORO DELLE FORZE NON CONSERVATIVE:
$W = \Delta K$ (teorema dell energia cinetica)
$W_{nc} + W_c = \Delta K$ (nel caso agiscono forze conservative e non)

$W_c = -\Delta U$ (lavoro di una forza conservativa) *in definitiva possiamo dire...*

$W_{nc} = \Delta K+\Delta U = (K-K_0) + (U-U_0) = (K+U) - (K_0+U_0)$ *ma* $K+U = E$ *quindi possiamo scrivere...*

$\boxed{\mathbf{W_{nc}} = E-E_0}$ **Il lavoro eseguito da tutte le forze non conservative equivale alla variazione di energia meccanica totale del sistema**

- CONSERVAZIONE DELL ENERGIA IN UNA MOLLA:

$W_s = \_\, k\cdot x_0^2 - \_\, k\cdot x^2$ (lavoro eseguito da una molla)

$W_c = -\Delta U$ (lavoro eseguito da forze conservative) *ne consegue che...*

$\mathbf{U_s} = \_\, k\cdot x^2$ **Energia Potenziale Elastica immagazzinata nella molla**

$E = K+U$ (energia meccanica totale se agiscono solo forze conservative)

$\Rightarrow E = \_\, m\cdot V_0^2 + \boxed{\_\, k\cdot x_0^2} = \_\, m\cdot V^2 + \_\, k\cdot x^2$

ma in una molla $x_0=0 \Rightarrow \_\, k\cdot x_0^2 = 0$

$E = \_\, m\cdot V_0^2 = \_\, m\cdot V^2 + \_\, k\cdot x^2$

♣ In condizioni conservative in una molla K+U e una costante del moto ed equivale all energia cinetica iniziale e all energia meccanica totale: $\boxed{\mathbf{E_c} = K_0 = K+U}$

♣ Ma se agiscono forze non conservative (attrito) l energia meccanica totale non sara piu una costante del moto e l energia finale sara minore di quella iniziale.

6 - IMPULSO, URTI, CENTRO DI MASSA

Impulso di una forza

$\boxed{\mathbf{P} = mV}$ **Quantita di moto**. E il prodotto di un vettore per uno scalare e quindi una grandezza vettoriale [Kg·m/s]

$\mathbf{F} = \Delta P/\Delta t$ (II principio della dinamica espresso in funzione di P)

$F = \Delta P/\Delta t = dP/dt \Rightarrow dP = F\,dt \Rightarrow$ *integrando...* $\Rightarrow \Delta P = P-P_0 = \int F\,dt$

$\mathbf{I} = \Delta P = \int_{t0}^{t} F\,dt$ Si definisce **Impulso di una forza** la variazione di quantita di moto prodotta sulla particella

$\boxed{\mathbf{I} = \Delta P = F_{media}\,\Delta t}$ **Impulso di una forza variabile**

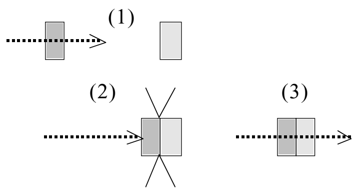
$\boxed{\mathbf{I} = \Delta P = F\,\Delta t}$ **Impulso di una forza costante**

Urti

- URTO DI DUE PARTICELLE IN UN SISTEMA ISOLATO: la quantita di moto in un sistema isolato resta costante, quindi nel caso di urto tra due particelle la quantita di moto totale iniziale sara uguale alla quantita di moto totale finale.

  $P_{tot} = P_1+P_2 = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad (P_1+P_2)_0 = (P_1+P_2)_f \quad \Rightarrow \quad (P_{tot})_0 = (P_{tot})_f$

- URTO TOTALMENTE ANELASTICO: si conserva la quantita di moto totale ma non l energia cinetica totale. I due corpi rimangono uniti dopo l urto procedendo quindi alla medesima velocita .



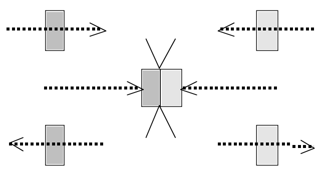
$(P_{tot})_0 = (P_{tot})_f$ (conservazione della quantita di moto)

$(m_1V_1)_0 + (m_2V_2)_0 = (m_1+m_2)V_f$ **Conservazione Quantita di Moto**

$\boxed{V_f = (P_1+P_2) / (m_1+m_2)}$ **Velocita finale dopo un urto anelastico**

- URTO PERFETTAMENTE ELASTICO: si conservano sia la quantita di moto totale che l energia cinetica totale. Entrambi i corpi procedono separatamente in direzioni diverse.

♣ Nel caso particolare in cui i due corpi hanno la stessa massa accadra che le velocita finali saranno uguali a quelle iniziali



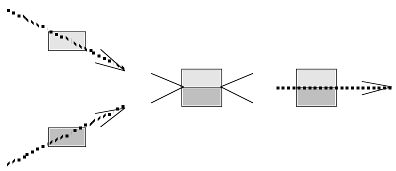
$(m_1V_1)_0 + (m_2V_2)_0 = (m_1V_1)_f + (m_2V_2)_f$ **Conservazione Quantita di Moto**

$(\_\ m_1V_1^2)_0 + (\_\ m_2V_2^2)_0 = (\_\ m_1V_1^2)_f + (\_\ m_2V_2^2)_f$ **Conservazione Energia Cinetica**

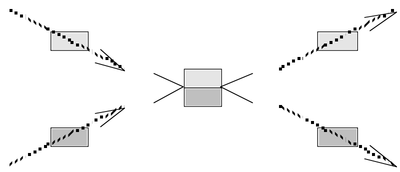
$$\begin{cases} V_{1f} = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2} V_{1i} + \dfrac{2\,m_2}{m_1+m_2} V_{2i} \\[2ex] V_{2f} = \dfrac{2\,m_1}{m_1+m_2} V_{1i} + \dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2} V_{2i} \end{cases}$$

Velocita finale dopo un urto elastico

- URTI IN DUE DIMENSIONI: come nei casi precedenti ma utilizzando separatamente le componenti X e Y della quantita di moto.



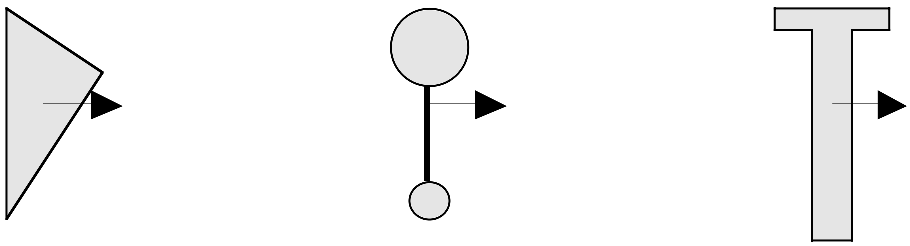
Urto anelastico



Urto elastico

Centro di massa

Un corpo esteso o un sistema di particelle (rigidi) si muovono come se tutta la massa fosse concentrata in un punto detto centro di massa e come se ad esso si applicassero le forze esterne.



- COORDINATE DEL CENTRO DI MASSA:
  $\mathbf{X_c} = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_nx_n) / m_1+m_2+m_n = \Sigma (m_ix_i) / M$
  $\mathbf{Y_c} = (m_1y_1 + m_2y_2 + m_ny_n) / m_1+m_2+m_n = \Sigma (m_iy_i) / M$
  $\mathbf{Z_c} = (m_1z_1 + m_2z_2 + m_nz_n) / m_1+m_2+m_n = \Sigma (m_iz_i) / M$

♣ Il centro di massa e piu vicino alla particella piu pesante o alla zona di area piu estesa o al volume maggiore (corpi estesi)

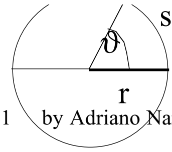
$\boxed{\mathbf{V_c} = (\Sigma mV) / M}$	**Velocita del centro di massa**
$\boxed{\mathbf{a_c} = (\Sigma ma) / M}$	**Accelerazione del centro di massa**
$\boxed{\mathbf{P} = \Sigma P = MV_c = \textit{costante}}$	**Quantita di moto totale**
$\boxed{\Sigma F = Ma_c = \Delta P/\Delta t}$	**II legge della dinamica applicata al centro di massa**

7 - MOTO ROTATORIO

Si deve assumere che il corpo in rotazione sia rigido. Nei moti rotatori vigono leggi simili a quelle dei moti lineari in cui pero velocita , accelerazione e massa sono sostituite da grandezze analoghe. Fondamentale e inoltre l introduzione del radiante poiche nel moto rotatorio l angolo ϑ svolgera il ruolo del Δx ovvero dello spazio percorso.

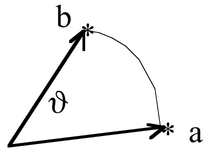
- IL RADIANTE (**rad**) e l angolo sotteso da un arco di circonferenza la cui lunghezza e uguale al raggio della circonferenza stessa. $\boxed{\mathbf{s = r \cdot \vartheta}}$ per $\vartheta = 1^{rad} \Rightarrow s = r$

  $360° = 2\pi r/r = 2\pi$ (rad) **Radianti in un angolo giro**
  1 rad $= 360/2\pi \approx 57{,}3°$ **Equivalenza di un radiante in gradi**



ϑ rad $= (\pi/180)\ \vartheta$ grad **Conversione radianti/gradi**

- VELOCITA E ACCELERAZIONE ANGOLARI: velocita e accelerazione del vettore posizione rispetto al centro di rotazione ovvero del *raggio vettore*, cioe del segmento che unisce la particella in esame al centro di rotazione.



$\boldsymbol{\omega} = (\vartheta_2-\vartheta_1) / (t_2-t_1) = \Delta\vartheta / \Delta t$ *rad/sec* **Velocita angolare media**

$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vartheta / \Delta t = d\vartheta / dt$ *rad/sec* **Velocita angolare istantanea**

$\boldsymbol{\alpha} = \Delta\omega / \Delta t$ *rad/sec^2* **Accelerazione angolare media**

$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega / \Delta t = d\omega / dt$ *rad/sec^2* **Accelerazione angolare istantanea**

♣ N.B.: in un corpo in rotazione <u>tutte</u> le particelle hanno lo stesso valore di velocita e accelerazione angolari, <u>non</u> cosi per velocita e accelerazione lineari che invece dipendono da r (vedere piu avanti).
ω e α sono grandezze vettoriali ma ω e α sono scalari.

- EQUAZIONI CINEMATICHE ROTAZIONALI: sono analoghe a quelle lineari ma utilizzano velocita e accelerazione radiale e il $\Delta\vartheta$ al posto di Δx. Come le altre valgono per accelerazione costante, quindi α=costante.

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

$$\vartheta = \vartheta_0^2 + \omega_0\, t + \_\ \alpha\, t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\, \alpha\, (\vartheta - \vartheta_0)$$

- RELAZIONE TRA GRANDEZZE ANGOLARI E LINEARI:

$V = \Delta s/\Delta t$ (definizione di velocita lineare)
$s = r\,\vartheta$ (dalla definizione di radiante) *quindi sostituendo...*
$V = r\, \Delta\vartheta/\Delta t$ *ma* $\Delta\vartheta/\Delta t = \omega$ *per definizione, quindi sostituendo* ω...

$\boxed{V = r\,\omega}$ **Relazione tra velocita lineare e velocita angolare.**

♣ Tutti i punti del corpo in rotazione hanno la stessa ω ma non la stessa V_t che dipende da r.
$a = \Delta v/\Delta t$ (definizione di accelerazione lineare)
$V = r\,\omega$ (relazione tra V lineare e angolare) *quindi sostituendo* V...
$a_t = r\, \Delta\omega/\Delta t$ *ma* $\Delta\omega/\Delta t = \alpha$ *per definizione, quindi sostituendo* α...

$\boxed{a_t = r\,\alpha}$ **Relazione tra accelerazione tangenziale e angolare**

♣ Anche in questo caso α e costante in ogni punto del corpo in rotazione mentre a_t varia da punto a punto in funzione di r.

$a_r = V^2/r$ (definizione di accelerazione centripeta)

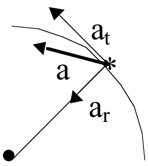
$V = r\,\omega$ (relazione tra V lineare e angolare) *quindi sostituendo* V...

$\boxed{a_r = r\,\omega^2}$ **Relazione tra accelerazione centripeta e angolare**

- ACCELERAZIONE LINEARE, TANGENZIALE E CENTRIPETA: a differenza della velocita lineare, l accelerazione lineare non corrisponde all accelerazione tangenziale ma si compone di questa e di una componente centripeta causata dal vincolo che lega la particella al centro di rotazione. Quindi l accelerazione lineare effettiva punta verso l interno della traiettoria circolare:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4}$$

$\boxed{r\sqrt{\alpha^2+\omega^4}}$ **Accelerazione lineare totale**



- MOMENTO DI INERZIA:

$K = \_\, mV^2$ (energia cinetica nel moto lineare) *quindi, considerando il corpo rigido come un insieme di particelle...*

$K_{tot} = \Sigma K = \Sigma\, \_\, mV^2$ *ma nel moto rotatorio* $V = \omega\, r \Rightarrow V^2 = \omega^2 r^2$ *quindi sostituendo...*

$K_{tot} = \Sigma\, \_\, m\,\omega^2 r^2$ *ma* _ *e* ω *sono costanti per ogni particella del corpo rigido...*

$K_{tot} = \_\, \omega^2\ \Sigma\, m\, r^2$ (**Energia cinetica di rotazione**)

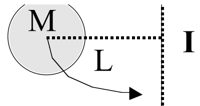
$\boxed{\mathbf{I} = \Sigma\, m\, r^2}$ Questa espressione si definisce **Momento di Inerzia** e svolge il ruolo della massa in tutte le equazioni dei moti rotatori. I si misura in $Kg \cdot m^2$ [SI] o $g \cdot cm^2$ [cgs]

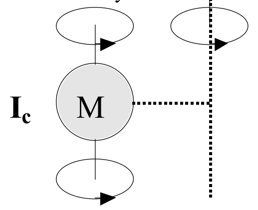
$\boxed{\mathbf{K}_{tot} = \_\, I\, \omega^2}$ **Energia cinetica di Rotazione**

♣ Confrontando con l energia cinetica lineare ($\_\, mV^2$) e evidente che come nei moti rotatori *I* prende il posto di *m* cosi come *ω* svolge il ruolo di *V*.

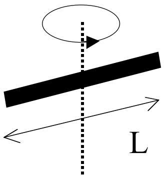
- TEOREMA DEGLI ASSI: permette di calcolare il momento di inerzia di un corpo rigido di massa *M* rispetto ad un asse decentrato posto ad una distanza *L* dal centro di massa.

$\boxed{\mathbf{I} = I_c + M\,L^2}$ dove $\mathbf{I_c}$ = momento di inerzia dello stesso corpo rispetto ad un asse parallelo al primo ma passante per il centro di massa



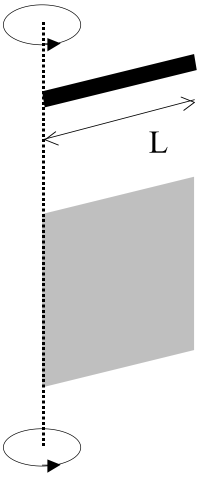


I per alcuni corpi rigidi omogenei (da usare nel teorema degli assi come $\mathbf{I_c}$ nel caso di rotazioni su assi decentrati):



Sbarretta sottile 1:

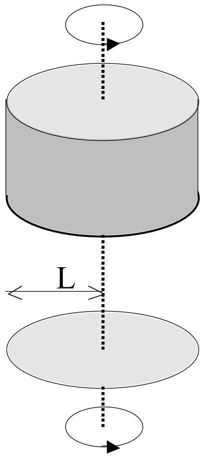
$\mathbf{I} = 1/12\ ML^2$



Sbarretta sottile 2:

$\mathbf{I} = 1/3\ ML^2$

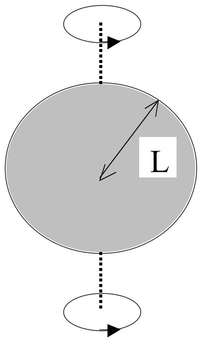
(vale anche per lastre sottili tipo porta)



Cilindro pieno:

$\mathbf{I} = 1/2\ ML^2$

(vale anche per i dischi)



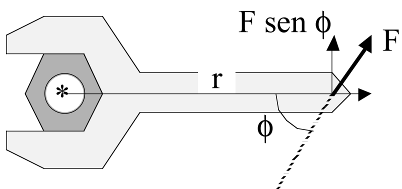
Sfera piena:

$\mathbf{I} = 2/5\ ML^2$

♣ Per eventuali altre forme consultare il libro di testo. Tutte le formule sono ricavabili dalla sommatoria degli ML^2 per porzioni di massa che tendono a 0 (*lim* dM→0 di $\Sigma dM \cdot L^2$) ovvero dall'integrale da L_0 a L di $[L^2\ dM]$ e ponendo $M = \rho V$, cioe $\mathbf{I} = \int_{L0}^{L} \rho\, L^2\, dV$ ricordando che $\rho = M/V$ e $V = L^3$. E bene provare per esercizio a calcolare la formula di I per le sbarrette 1 e 2 ...potrebbe essere una domanda d esame!

- MOMENTO MECCANICO: il momento τ di una forza esprime l efficacia della forza stessa nel mettere in rotazione un corpo ed e dato dal prodotto vettoriale della forza applicata F per il braccio r (*distanza del punto di applicazione della forza dal fulcro o centro di rotazione*). Il prodotto vettoriale $A \times B = AB$ sen(*angolo tra i due vettori*) equivale qui a moltiplicare r per la componente tangenziale della forza applicata F.

$\boldsymbol{\tau} = r \times F \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau} = r\,F\,\text{sen}\,\phi}$



♣ nel caso particolare in cui F e gia ⊥ al braccio r si avra $\boldsymbol{\tau} = r\,F$ anche perche il sen90=1

♣ Poiche r e il vettore posizione del punto di applicazione della forza F, τ risulta essere il prodotto di due vettori (prodotto vettoriale, vedere definizione) e quindi a sua volta un vettore.

$\tau = \mathbf{F}\,r$ (momento meccanico di una forza tangenziale)

$F = ma$ (II principio della dinamica) *quindi sostituendo* F...
$\tau = m\, \mathbf{a}_t\, r$ *ma sappiamo anche che...*
$a_t = r\, \alpha$ (relazione tra accelerazione tangenziale e angolare) *quindi sostituendo...*
$\tau = m\, r\, \alpha\, r = \mathbf{m\, r^2}\, \alpha$ *...ma* $m\, r^2 = I$ (momento di inerzia) *quindi sostituendo* I *si otterra ...*

$\boxed{\boldsymbol{\tau} = I\, \alpha}$ **Relazione tra momento meccanico e accelerazione angolare**

- LAVORO, POTENZA ED ENERGIA NEL MOTO ROTATORIO: in un corpo in rotazione la componente radiale della forza applicata non compie lavoro perche e sempre ⊥ allo spostamento (vedere la definizione di lavoro). Soltanto la componente tangenziale compie lavoro. Ma la forza tangenziale risultante in un punto qualsiasi posto a distanza r dal centro di rotazione e data da $\boldsymbol{\tau} = r\, F \text{sen}\phi$ e lo spostamento nel moto rotatorio e definito dall angolo di rotazione $\boldsymbol{\vartheta}$, quindi il lavoro (prodotto di forza per spostamento) diventa nel moto rotatorio:

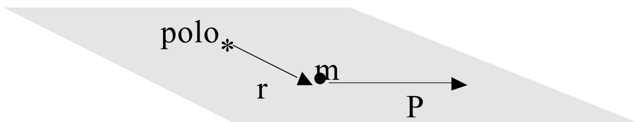
$\boxed{\mathbf{W} = \tau\, \vartheta}$ **Lavoro nel moto rotatorio**

$P = \Delta \mathbf{W} / \Delta t$ (definizione di potenza) *quindi nel moto rotatorio possiamo scrivere...*
$P = (\tau\, \Delta\vartheta) / \Delta t$ *il* Δ *riguarda solo* ϑ *perche* τ *non puo variare. Notare pero che...*
$\omega = \Delta\vartheta / \Delta t$ (definizione di velocita angolare) *quindi sostituendo nella precedente...*

$\boxed{\mathbf{P} = \tau\, \omega}$ **Potenza nel moto rotatorio**

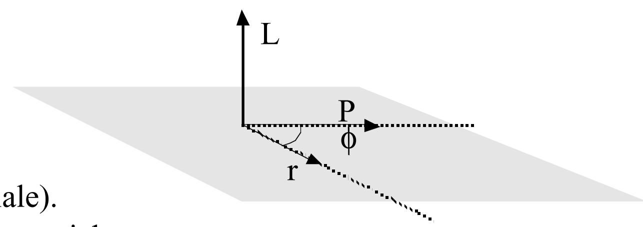
$\boxed{\mathbf{W} = \Delta K = \_\, I\, \omega^2 - \_\, I\, \omega_0^2}$ **Teorema dell energia cinetica nel moto rotatorio**

- MOMENTO ANGOLARE (**L**) DI UNA PARTICELLA: prodotto vettoriale tra vettore Posizione Istantanea e vettore Quantita di Moto Istantanea. Esprime in un certo senso la rotazione della particella rispetto ad un polo. Tale rotazione deriva dal fatto stesso che la particella e in movimento .



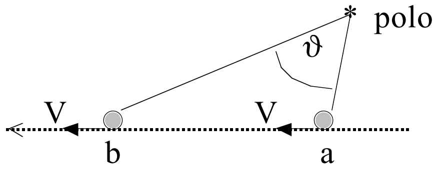
$L = r \times P = r \times mV$

$\boxed{\mathbf{L} = r\, m\, V\, \text{sen}\, \phi}$ **Momento Angolare**

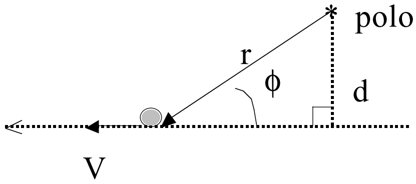


♣ L e il prodotto di due vettori e quindi a sua volta un vettore, perpendicolare al piano formato dai primi due (vedere definizione di prodotto vettoriale).
In questa figura si vede il passaggio dalla situazione materiale (in alto) alla costruzione vettoriale (in basso). Il senso dinamico del momento angolare e invece illustrato nelle figure successive.

♣ Perche una particella in moto rettilineo possiede un momento angolare? Il momento angolare di una particella e dovuto al suo stesso movimento rispetto ad un punto fissato (polo). Nella figura a lato si vede come una particella pur in moto rettilineo compia di fatto una rotazione di angolo ϑ rispetto al polo fissato.



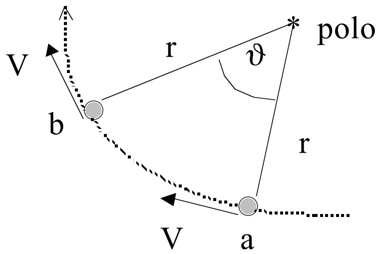
♣ In quest altra figura si vede vettorialmente la situazione di una particella di massa m. Il suo momento angolare ha valore $L = m\ V\ r\ \text{sen}\phi$ ma geometricamente $(r\ \text{sen}\phi) = d$ quindi nel caso del moto rettilineo si puo formulare:



$\boxed{L = m V d}$ **Momento Angolare nel moto rettilineo**

dove *d* e la distanza del polo dalla retta del moto.

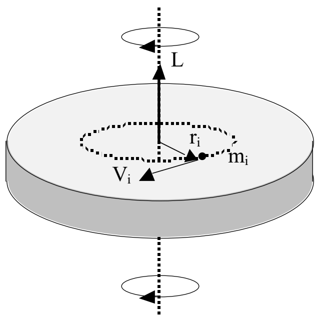
♣ La figura a lato invece rappresenta un caso di moto circolare con polo fissato nel centro di rotazione. Qui in ogni posizione assunta dalla particella m il vettore posizione r ha modulo costante e il vettore velocita V e sempre perpendicolare ad r. Ne consegue che il seno di $\phi=90°$ e sempre 1 ed il valore del momento angolare rimane costantemente:



$\boxed{L = m V r}$ **Momento Angolare nel moto circolare**

Questo vale, come si e gia detto, soltanto se il polo coincide con il centro di rotazione

♣ Nel caso di un corpo rigido in rotazione, sommando le *n* particelle che lo compongono, si puo ottenere il momento angolare totale $L_{tot} = \Sigma L_i = \Sigma (m_i V_i r_i)$. Si noti pero che nel moto circolare $V = r\omega$ quindi la precedente espressione puo essere riformulata come $L_{tot} = \omega (\Sigma m_i r_i^2)$ dove la ω e stata esclusa dalla sommatoria perche ha valore costante per tutti i punti. Si noti infine come nella formula figura $mr^2 = I$ (momento di inerzia). In conclusione si potra allora formulare:



$\boxed{L_{tot} = I\ \omega}$ **M. A. di un corpo rigido in rotazione**

- RELAZIONE TRA MOMENTO MECCANICO E MOMENTO ANGOLARE:

$\boldsymbol{\tau} = dL / dt$ **Il momento meccanico equivale alla rapidita di variazione del momento angolare** (la dimostrazione omessa e basata su una proprieta del prodotto vettoriale. E consigliabile almeno darle un occhiata su un libro di testo)

- MOMENTO MECCANICO DI UNCORPO RIGIDO:

$\tau = dL/dt$ (appena visto) *ma per un corpo rigido in rotazione* $L = I\omega$ *e quindi:*

$\tau = I\,(d\omega/dt)$ *con* I *portata fuori derivata perche costante. Ora notiamo che* $d\omega/dt = \alpha$

$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{tot} = I\,\alpha}$ **Momento meccanico totale di un corpo rigido in rotazione**

- CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE: supponiamo di avere un corpo rigido in rotazione in cui il momento meccanico risultante sia pari a 0.

  $\boldsymbol{\tau} = dL / dt = 0$ (relazione tra momento meccanico e momento angolare) *da questa risulta che la derivata di* L *e* 0 *e quindi che in questo caso* L *deve essere una costante. Si puo allora scrivere...*

  $L_i = L_f = 0$ *ma sappiamo anche che...*

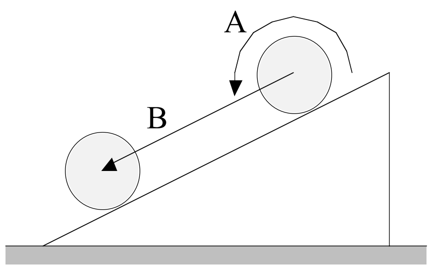
  $L = I\,\omega$ (momento angolare di un corpo rigido in rotazione) *e quindi sostituendo...*

$\boxed{I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f = \text{costante}}$ **Conservazione del momento angolare**

♣ Quando il momento meccanico agente su un corpo rigido (o sistema di particelle) e nullo, il suo momento angolare resta costante. Questo principio e utile per calcolare la variazione di velocita di un corpo che muta il suo momento di inerzia (si allarga o si stringe mentre ruota). Ad esempio e noto che una ballerina che ruota sulle punte puo aumentare la velocita stringendo le braccia e fermarsi distendendole completamente, variando cioe il suo momento di inerzia.

- ENERGIA CINETICA DI UN CORPO CHE ROTOLA: l energia cinetica di un corpo in moto per rotolamento e data dalla somma dell energia cinetica rotazionale del corpo rispetto al centro di massa e dell energia cinetica associata alla traslazione del centro di massa.

♣ nella figura si evidenzia come il rotolamento di un cilindro o di una sfera e composto da due movimenti:
A) rotazione sul proprio asse e quindi sul centro di massa
B) traslazione del centro di massa lungo il pendio
Notare infatti che nella formula apparira al primo termine l energia cinetica di rotazione sul proprio asse (_ $I_c\,\omega^2$) e al secondo proprio l energia cinetica del movimento lineare di traslazione del corpo sul piano (_ $M\,V^2$).



$K = \_\,\mathbf{I}\,\omega^2$ (energia cinetica rotazionale) *applicando il Teorema degli Assi...*

$I = I_c + MR^2$ *che sostituito nella precedente...*

$K = \_\ \omega^2 (I_c + MR^2) = \_\ I_c\, \omega^2 + \_\ MR^2\, \omega^2$ *da cui sostituendo* $R\omega = V$ *si ha...*

$\boxed{K = \_\ I_c\, \omega^2 + \_\ M V^2}$ **Energia cinetica totale di un corpo in rotolamento**

8 - STATICA

La statica dei corpi rigidi studia le condizioni per cui un corpo si trova in *equilibrio statico* ovvero e fermo. Il problema, apparentemente banale, e in realta fondamentale per assicurare la stabilita di una struttura.

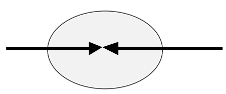
- UN CORPO RIGIDO E IN EQUILIBRIO STATICO SOLTANTO SE:
  1) la risultante delle forze esterne agenti sul corpo e nulla;
  2) la risultante dei momenti delle forze esterne e nulla rispetto a qualsiasi polo:

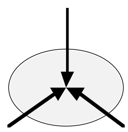
$\boxed{\Sigma\, \mathbf{F} = 0}$ **Risultante delle forze = 0** *equilibrio traslazionale*

$\boxed{\Sigma\, \boldsymbol{\tau} = 0}$ **Risultante dei momenti = 0** *equilibrio rotazionale*

♣ Per risolvere qualsiasi problema di statica basta applicare entrambe le condizioni. Il loro significato e molto semplice: chiaramente un corpo e fermo quando non si sposta in nessuna direzione (condizione 1) e non ruota su nessun asse (condizione 2).

♣ Conseguenza di cio e che se due forze agiscono su un corpo, perche questo rimanga in equilibrio devono essere di modulo e direzione uguale ma di verso opposto. Se piu di una forza agisce sul corpo, la condizione di equilibrio piu semplice e che siano di uguale modulo, verso convergente in uno stesso punto e direzioni separate tra loro dallo stesso angolo.

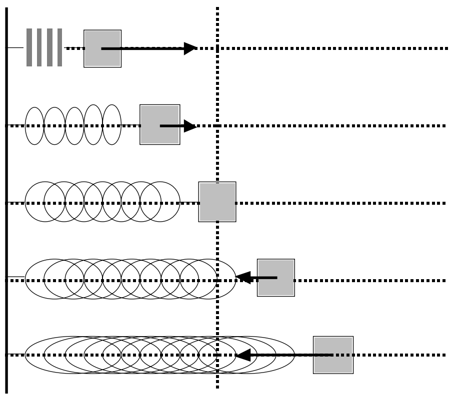


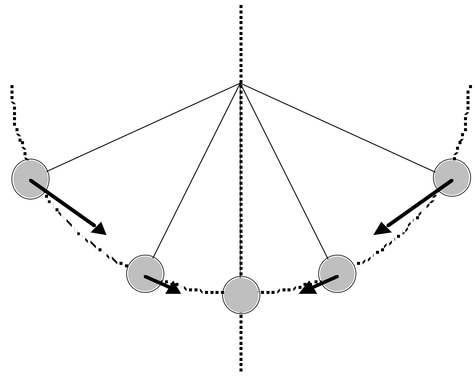


♣ Notare che quando un corpo rigido e sottoposto alla forza di gravita il baricentro coincide con il centro di massa. In questo stesso punto agira quindi il momento meccanico della forza peso.
Ricordare che la coordinata X del centro di massa e : $x_c = \Sigma\, (m_i x_i) / \Sigma\, m_i$

9 - MOTO ARMONICO

Il moto armonico (detto anche oscillatorio o periodico) e un caso particolare di moto lineare o circolare in cui la forza agente su di un corpo non e costante ma varia in modo proporzionale allo spostamento del corpo stesso rispetto ad una posizione di equilibrio. Tale forza deve essere sempre diretta verso il punto di equilibrio in modo tale che il corpo oscilla intorno a questa posizione. E il caso tipico di una massa appesa ad una molla o di un pendolo.





Esistono tre varianti di moto armonico:

M.A. Puro: il corpo oscilla indefinitamente tra 2 posizioni senza perdita di energia meccanica (moto perpetuo o ideale);

M.A. Reale: l attrito riduce progressivamente l energia e quindi l ampiezza delle oscillazioni fino a far cessare il movimento (oscillazioni smorzate);

M.A. Forzato: la presenza dell attrito e compensata dall azione di una forza esterna che compie lavoro sul sistema (oscillazioni forzate. E il caso dell altalena).

Moto Armonico Puro

- MOTO ARMONICO LUNGO UN ASSE: il moto armonico di una particella lungo un asse X e descritto dalla posizione x della stessa rispetto al punto di equilibrio (origine dell asse):

$$\boxed{\mathbf{x} = A \cos(\omega t + \delta)}$$ **Posizione di una particella in M.A. Puro lungo un asse**

Parametri del M.A.:	x	=	*distanza* dalla posizione di equilibrio
	A	=	*ampiezza* delle oscillazioni ($\pm x_{max}$)
	$(\omega t + \delta)$	=	*fase* (parametro utile per confrontare due moti)
	ω	=	*frequenza angolare* o *pulsazione* (radianti al secondo)
	t	=	tempo
	δ	=	*angolo di fase* (posizione iniziale in radianti dallo 0)
	T	=	*periodo* (secondi necessari a percorrere un ciclo)
	f	=	*frequenza* (cicli percorsi in un secondo)

♣ ω, δ e T sono <u>costanti</u> del moto. In particolare ϖ e δ dipendono dalle condizioni iniziali.

$\boxed{\mathbf{T} = 2\pi / \omega}$ **Periodo**

$\boxed{\mathbf{f} = 1/T = \omega / 2\pi}$ **Frequenza**

$\boxed{\boldsymbol{\omega} = 2\pi f = 2\pi / T}$ **Frequenza angolare** o **Pulsazione**

$\boxed{\mathbf{V} = dx/dt = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \delta)}$ **Velocita del corpo in moto armonico**
(derivata dell equazione di posizione)

$a = dV/dt = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$ *ma sapendo che...*

$x = A \cos(\omega t + \delta)$ *sostituendo nella precedente si ottiene...*

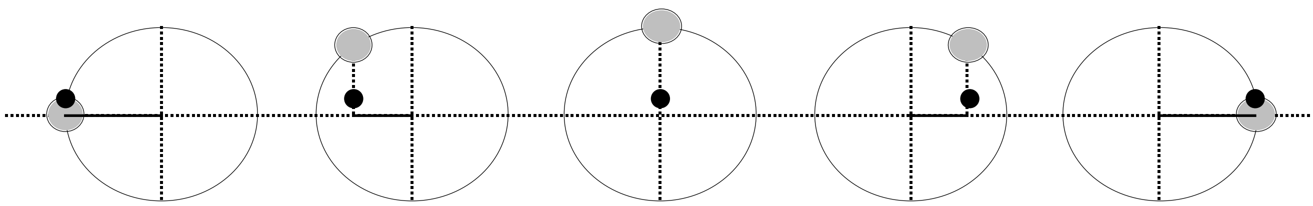
$\boxed{\mathbf{a} = -\omega^2 x}$ **Accelerazione del corpo**

Inoltre, poiche le funzioni sen *e* cos *oscillano tra* ±1*, le espressioni di* V *ed* a *assumono ciclicamente i valori massimi:*

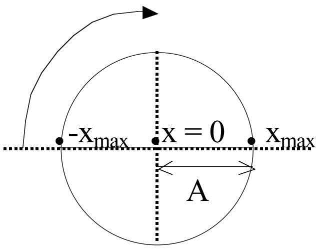
$\boxed{\mathbf{V}_{max} = \omega A}$ **Velocita massima**

$\boxed{\mathbf{a}_{max} = \omega^2 A}$ **Accelerazione massima**

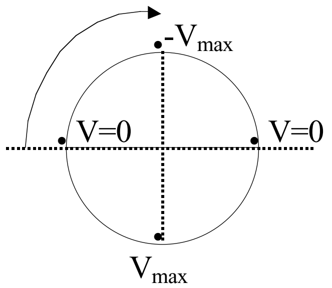
♣ nel moto armonico infatti il corpo e sottoposto ad una forza che varia di intensita e con essa anche accelerazione e velocita variano in funzione della posizione del corpo stesso. Prendiamo come esempio il moto armonico lungo un asse X (particella virtuale nera) prodotto dalla proiezione del moto circolare di una particella (pallina grigia):



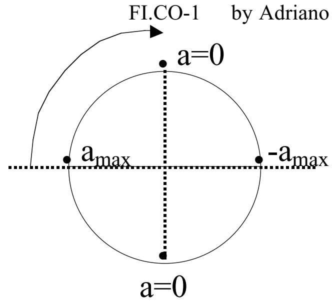
Durante questo moto, in funzione della posizione **x**, la *fase* $(\omega t + \delta)$ oscilla tra i valori ±1 e conseguentemente le equazioni di **V** ed **a** si annullano o raggiungono il valore massimo:



Andamento della posizione
della particella durante il moto armonico. Il valore max di x corrisponde ad A.



Andamento della velocita :
e sfasata di $\pi/2$ (90°) rispetto allo spostamento.



Andamento della velocita :
e sfasata di π (180°) rispetto allo spostamento.

N.B.: cio che stiamo analizzando e il moto della particella nera, ombra di quella grigia. La particella nera rallenta alle estremita fino a fermarsi per poi tornare in dietro. Invece la sua max velocita la raggiunge al centro (positiva o negativa secondo il verso del movimento).

- ANGOLO DI FASE (δ) E AMPIEZZA (A):

sia l ampiezza che l angolo di fase sono funzioni delle condizioni iniziali x_0 e V_0. Nelle loro espressioni figura anche la pulsazione ω che pero e una costante nel moto ideale (la frequenza e costante).

$x = A\cos(\omega t + \delta)$ (posizione nel moto armonico)

$V = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$ (velocita nel moto armonico)

all istante iniziale t=0 *si avra allora...*

$x_0 = A\cos\delta$

$V_0 = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\delta$ *dividendo la prima per la seconda si ottiene...*

$V_0/x_0 = -\omega\,\mathrm{Tg}\,\delta$ *da cui esplicitando* δ *si ha...*

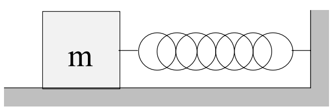
$$\boxed{\mathrm{Tg}\,\boldsymbol{\delta} = -V_0/\omega x_0}$$ **Angolo di Fase**

Sommando i quadrati delle due equazioni che prima avevamo diviso, si ottiene inoltre:

$$\boxed{\mathbf{A} = \sqrt{x_0^2 + (V_0/\omega)^2}}$$ **Ampiezza**

- PROPRIETA DEL MOTO ARMONICO: (riepilogo)
  1) x, V, a variano in modo sinusoidale ma sfasati tra loro;
  2) a e proporzionale ad x ma ha verso opposto (x come vettore posizione);
  3) f e T non dipendono da A.

Moto Armonico in un sistema MASSA+MOLLA



Si consideri trascurabile la massa della molla stessa.

$F = -k\,x$ (forza esercitata da una molla)

$F = ma$ (II principio della dinamica) *ugualiando ed esplicitando* a ...

$\boxed{\mathbf{a} = -kx / m}$ **Accelerazione nel sistema massa-molla**

♣ notare che anche in questo caso l accelerazione risulta proporzionale allo spostamento

ma sappiamo anche che:

$a = d^2x/dt^2$ (definizione di accelerazione lineare) *quindi, ugualiando alla precedente...*

$d^2x/dt^2 = -kx / m$ *da cui...*

$\boldsymbol{\omega}^2 = k/m$ *sostituendo questa espressione nella gia nota:*

$T = 2\pi/\omega$ (periodo) *...e questa in:*

$f = 1/T$ (frequenza) *...si ottengono rispettivamente:*

$\boxed{\mathbf{T} = 2\pi \sqrt{m/k}}$

$\boxed{\mathbf{f} = \_ \sqrt{k/m}}$

Periodo e Frequenza di un sistema massa+molla in moto oscillatorio ideale

♣ Notare che T ed F dipendono dall elasticita della molla

- ENERGIA NEL MOTO ARMONICO:

si prendera in esame un sistema massa+molla ma i risultati valgono per qualsiasi oscillatore in puro moto armonico.

$K = \_\, m V^2$ (energia cinetica di una molla)

$V = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ (velocita di un oscillatore armonico)

sostituendo la seconda nella prima...

$\boxed{\mathbf{K} = \_\, m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t+\delta)}$ **Energia Cinetica nel Moto Armonico**

$U = \_\, k x^2$ (energia potenziale immagazzinata in una molla in tensione)

$x = A \cos(\omega t + \delta)$ (posizione nel moto armonico lungo un asse X)

sostituendo la seconda nella prima...

$\boxed{\mathbf{U} = \_\, k A^2 \cos^2(\omega t + \delta)}$ **Energia Potenziale nel Moto Armonico**

$E = K+U$ (energia meccanica totale)

sostituendo in questa espressione le precedenti K *e* U *tenendo conto che in esse* $\omega^2 = k/m$ *e che inoltre* $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *per una legge trigonometrica, si ottiene in definitiva:*

$\boxed{\mathbf{E} = \_\, k A^2}$ **Energia Totale nel Moto Armonico**

♣ L energia totale di un oscillatore armonico e una costante del moto, e proporzionale all ampiezza delle oscillazioni ed equivale alla max U (raggiunta quando $x = \pm A$) e alla max K (raggiunta per $x = 0$). Durante il moto infatti i valori di K ed U oscillano annullandosi alternativamente l uno in corrispondenza del valore max dell altro.

- VELOCITA IN UNA GENERICA POSIZIONE:

sapendo che:

$E = \_\ k A^2$ (energia totale)
$K = \_\ m V^2$ (energia cinetica)
$U = \_\ k x^2$ (energia potenziale molla) *sostituendo queste espressioni in...*
$E = K + U$ (energia totale) *si ottiene...*
$\_\ k A^2 = \_\ m V^2 + \_\ k x^2$ *da cui, esplicitando* V...

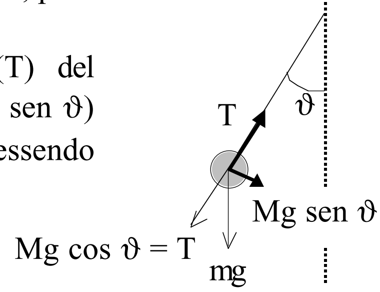
$\boxed{\mathbf{V} = \pm \sqrt{(k/m)(A^2-x^2)}}$ **Velocita in funzione della posizione x**

♣ Notare infatti che k, m, A sono costanti.

Il Pendolo

Esistono tre tipi di pendolo: pendolo semplice, pendolo fisico o composto, pendolo di torsione.

- PENDOLO SEMPLICE: sulla massa (m) agiscono la tensione (T) del vincolo e la forza peso (mg) con la sua componente tangenziale (mg sen ϑ) che tende sempre a riportare la massa a in posizione ϑ=0 essendo costantemente opposta al verso dello spostamento .



sappiamo che:

$F_t = -\ mg \text{ sen } \vartheta$ (componente tangenziale della forza peso)
il segno negativo perche la forza di richiamo e sempre opposta allo spostamento. Inoltre...

$a = d^2s/dt^2$ (definizione di accelerazione lineare)
sostituendo queste nella nota:

$F = ma$ (II principio della dinamica) *si ottiene...*

$-\ \cancel{m}g \text{ sen } \vartheta = \cancel{m}\,(d^2s/dt^2)$ *...ma* s = r ϑ *dove* r *e una costante (derivata = 0)...*

$d^2\vartheta/dt^2 = -\ g/r \text{ sen } \vartheta$ *tale funzione non e di* ϑ *ma di* senϑ *quindi non si tratta in realta di un moto oscillatorio puro. Tuttavia per piccoli* ϑ *possiamo approssimare* senϑ ≈ ϑ *e quindi formulare:*

$d^2\vartheta/dt^2 = -\ g/r\ \vartheta$ **Equazione del moto di un pendolo** (oscillatore puro per ϑ molto piccoli)

avendo approssimato ad un Moto Armonico puro, possiamo dire:

$\vartheta = \vartheta_0 \cos(\omega t + \delta)$ (posizione nel moto armonico)
dove ϑ *prende il posto di* x *, trattandosi di un moto circolare, e* $\vartheta_0 = \vartheta_{max}$. *Sostituendo* ϑ *nella precedente si otterra :*

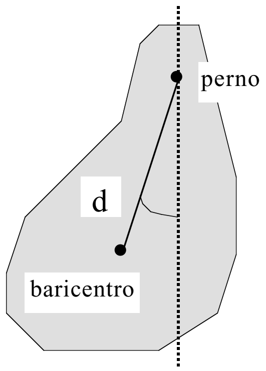
$\omega = \sqrt{g/r}$ **Pulsazione del Pendolo**

e inoltre, poiche $T = 2\pi/\omega$...

$\boxed{\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{r/g}}$ **Periodo del pendolo**

♣ N.B.: periodo e pulsazione del pendolo dipendono esclusivamente da g e dalla lunghezza r del vincolo. A parita di g (stessa quota, vedi cap. successivo) pulsazione e periodo (e quindi anche la frequenza) del pendolo dipende unicamente dalla lunghezza del filo.

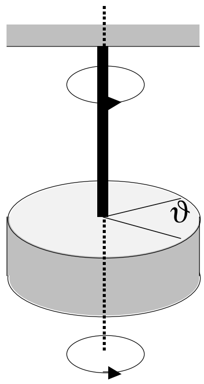
- PENDOLO FISICO O COMPOSTO: corpo rigido imperniato in un punto diverso dal suo baricentro. In questo caso la forza di gravita agisce (sul baricentro) con un momento meccanico $\tau = -\, mg\, r \operatorname{sen} \vartheta$ dove il segno meno indica che τ si oppone al movimento richiamando il corpo stesso verso la posizione $\vartheta=0$.



$\boxed{\omega = \sqrt{mgd/I}}$ **Pulsazione**

$\boxed{\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{I/mgd}}$ **Periodo**

- PENDOLO DI TORSIONE: corpo rigido sospeso ad un vincolo. Quando il corpo viene ruotato, il vincolo si torce esercitando cosi sul corpo stesso un momento meccanico con fulcro nel punto in cui il corpo e appeso (presumibilmente il baricentro e centro di massa). Tale momento (τ) si oppone al movimento rotatorio e per valori molto piccoli sara proporzionale all angolo di torsione ϑ.



$\tau = -k\vartheta$ (momento meccanico esercitato dal vincolo)
dove k = costante di torsione del vincolo *e il segno meno e dovuto ancora al fatto che la forza si oppone al movimento.*

$\boxed{\omega = \sqrt{k/I}}$ **Pulsazione**

$\boxed{\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{I/k}}$ **Periodo**

♣ In tutti i casi abbiamo avuto una forza agente (la componente tangenziale della forza di gravita o, nell ultimo caso, l azione di rotazione sul corpo) che ha indotto il corpo al movimento. Contro questa (e quindi con segno meno) ha agito una seconda forza (sempre la componente tangenziale della gravita o la reazione del vincolo alla torsione) di intensita proporzionale allo spostamento e tendente a riportare il corpo nella condizione di equilibrio (ϑ=0).

10 - La legge di Newton e il moto dei pianeti

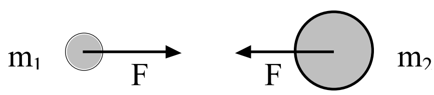
Le leggi che governano il moto dei pianeti (leggi di Keplero) derivano dalla legge di gravitazione universale (legge di Newton) e dalla conservazione del momento angolare.

Legge di Newton

- LEGGE DI NEWTON (O DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE): ogni particella dotata di massa (m_1) attrae ogni altra particella massiva (m_2) con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (r).

$$\boxed{\mathbf{F} = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Legge di Newton



G = costante universale gravitazionale = $6{,}672 \cdot 10^{-11}$ $[N \cdot m^2/Kg^2]$ SI

♣ Nel rispetto il III principio della dinamica, la forza F_1 con cui m_1 agisce su m_2 e uguale e contraria alla forza F_2 con cui m_2 agisce su m_1.
♣ La forza di gravita agisce a distanza, senza bisogno di un contatto materiale e indipendentemente dal mezzo in cui i corpi sono immersi.

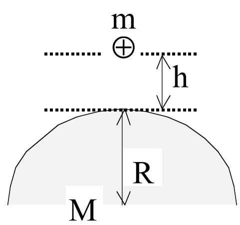
- CASO DI UN OGGETTO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE: consideriamo una massa m posta sulla superficie terrestre (raggio terrestre = R) e quindi sottoposta alla forza F esercitata dalla massa terrestre (M):

$F = \boxed{G\,\frac{M}{R^2}}\,m$ (legge di Newton sulla superficie terrestre)
tutte queste grandezze sono costanti e si possono racchiudere in una:
$g = GM/R^2$ *la legge di Newton diventa allora...*
$F = mg = ma$ (forza peso e II principio della dinamica)

g e l accelerazione esercitata dalla forza di gravita e (considerando la Terra perfettamente sferica) e costante sulla superficie terrestre ma variera al variare della quota della massa sulla superficie:

$$\boxed{\mathbf{g} = GM/(R+h)^2}$$
Accelerazione di gravita in funzione della quota h

$$\boxed{\mathbf{F} = G\,\frac{M\ m}{(R+h)^2}}$$
Forza di gravita alla quota h



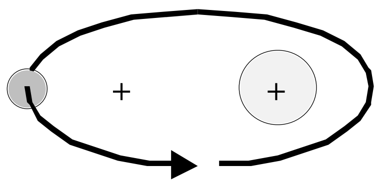
♣ Bisogna ammettere dunque che in realta anche la forza peso, attraverso g, dipende dalla quota sulla superficie terrestre. Fin ora l abbiamo sempre considerata costante perche abbiamo considerato trascurabile qualsiasi dislivello rispetto all enorme distanza R (raggio terrestre).

Leggi di Keplero

Il moto dei pianeti intorno al Sole (o dei un satellite intorno ai un pianeti) e descritto da tre leggi empiriche formulate da Johannes Keplero. In realta vedremo che esiste una dimostrazione basata sulla gravitazione universale

- I LEGGE DI KEPLERO: l orbita di un pianeta e un ellisse in cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

♣ Questo e vero nella pura teoria. In realta mentre le orbite cometarie sono spiccatamente, quelle planetarie hanno i fuochi tanto ravvicinati da poterli approssimare a coincidenti. In tale condizione l ellisse degenera in una circonferenza e potremo considerare costante la distanza Sole-pianeta.



- II LEGGE DI KEPLERO: il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.

♣ Il *raggio vettore* e la linea immaginaria Sole-Pianeta oppure, fissando un riferimento cartesiano centrato nel Sole, puo essere considerato il vettore posizione del pianeta.

La forza di gravita punta sempre verso il Sole (e una forza centrale), ne risulta sul pianeta un momento meccanico nullo (la forza coincide con il braccio e quindi l angolo tra di essi e 0):

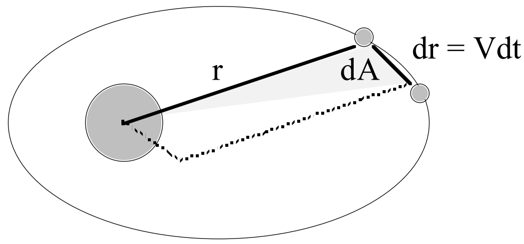
$\tau = r \cdot F = 0$ *ma e noto che:*

$\tau = dL/dt$ (relaz. tra momento meccanico e angolare) *dunque ugualiando le due...*

$dL/dt = 0$ *la derivata di una costante e 0, quindi se* dL=0, L *e una costante:*

$\boxed{\mathbf{L} = r \cdot P = r\,(m\,V) = \text{costante}}$ **Il Momento Angolare di un pianeta rispetto al Sole e una costante del moto**

Il raggio vettore r *spazza un area* dA *in un tempo* dt. *Inoltre* dA *e la meta del rettangolo* | r ˣ dr | *e* dr = Vdt. *Possiamo dire allora che:*



dA = _ | r · dr | = _ | r · Vdt |

Ma osserviamo che L = rP = r·mV ⇒ <u>rV</u> = L/m

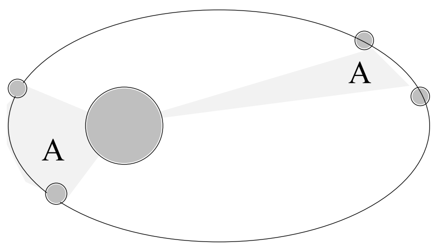
Sostituendo rV *nella precedente:*

dA = L/2m dt *da cui definitiva...*

dA/dt = L/2m *dove* L *ed* m *sono costanti, quindi...*

$\boxed{dA/dt = \text{costante}}$ **Il raggio vettore copre aree uguali in tempi uguali.**

♣ Cio implica che la velocita di un pianeta sia variabile durante l orbita, raggiungendo un max al perielio (punto dell orbita piu vicino al Sole) ed un min in corrispondenza dell afelio (punto piu distante). Nella figura a lato si vede infatti come due aree uguali, corrispondenti quindi a tempi uguali, non lambiscono uguali archi di ellisse. Nella zona piu vicina al Sole l arco percorso nel medesimo tempo e stato maggiore.



- III LEGGE DI KEPLERO:
  il quadrato del periodo e proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell orbita.

Assumiamo che l orbita sia una circonferenza (abbiamo visto che e approssimabile). Avremo il caso di una particella in moto circolare in cui la forza di gravita rappresenta il vincolo. Possiamo quindi ugualiare la Forza di gravita alla forza centripeta: $F_g = F_c$

$$\frac{G\,M\,\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}\,V^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{G\,M}{r} = V^2$$ *ma sapendo che...*

$V = 2\,\pi\,r\,/\,T$ ⟵

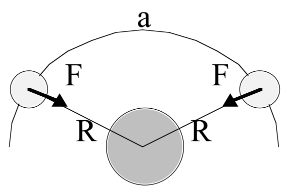
$T = 2\pi/\boldsymbol{\omega}$ (Periodo moto armonico) *ma:*
$V = r\,\omega$ (velocita lin.e ang.) ⇒ $\boldsymbol{\omega} = V/r$
quindi: $T = 2\pi r/V \Rightarrow V = 2\pi r\,/\,T$

sostituendo V *nella precedente*
ed esplicitando T *si ottiene:*

$$\mathbf{T}^2 = \boxed{\frac{4\pi^2}{GM}}\, r^3 = K_s\, r^3 \qquad \textit{dove:} \qquad K_s = \text{costante} = 2{,}97\cdot 10^{-19}\ [s^2/m^3]$$

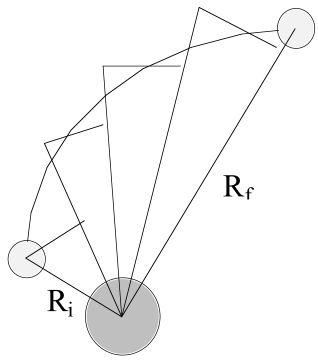
- CAMPO GRAVITAZIONALE: si tratta del concetto di campo (Faraday, programma di Fisica 2) esteso alla forza di gravita . Data una massa M, in ogni punto dello spazio circostante una seconda massa m ha la potenzialita di subire una forza gravitazionale. Ogni punto ha dunque la potenzialita di vedere esercitata una forza di intensita pari ad mg e quindi, per una stessa particella, dipendente da g. La direzione di questa forza converge in M. Intorno alla massa M si ha dunque un campo vettoriale : e il Campo Gravitazionale g di M.

- ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE:
Il lavoro fatto lungo un arco di circonferenza (a) *e nullo poiche per definizione il lavoro compiuto da una forza perpendicolare allo spostamento e 0. Il lavoro* *<u>lungo un segmento radiale</u>* (R) *invece e diverso da zero. Il lavoro totale compiuto dalla forza di gravita lungo l orbita di un pianeta e quindi dovuto alla sommatoria dei contributi dei segmenti radiali:*



$\mathbf{W} = \int_{Ri}^{Rf} F_r\, dr$ Lavoro eseguito da una forza centrale

E evidente che il lavoro dipende dalle condizioni iniziali e finali; da cio deduciamo che ogni forza centrale e conservativa. *Dal Cap.5 ricordiamo che:*



$W_c = -\Delta U$ (lavoro di una forza conservativa)

Ugualiando le due espressioni possiamo dire che:

$\Delta U = -\int_{Ri}^{Rf} \mathbf{F}_r\, dr$ (lavoro della forza di gravita)

La forza di gravita esercitata su una massa m *puo essere espressa vettorialmente come:*

$\mathbf{F} = -(GMm/R^2)\, \vec{R}$ *che una volta sostituita nella precedente e risolto l integrale fornisce...*

$U_f - U_i = -GMm\,(1/R_f - 1/R_i)$ *A questo punto va scelto un punto di riferimento per l energia potenziale. Per consuetudine si preferisce il punto in cui la forza si annulla:* $U_i = 0$ *per* R_i = infinito. *Sostituendoli si ha:*

$U_{(R)} = -GMm/R$ (energia potenziale di un sistema Terra-particella separate da una distanza R maggiore del raggio terrestre) *Generalizzando:*

$\boxed{\mathbf{U} = -(G\cdot m_1\cdot m_2)/r}$ **Energia Potenziale gravitazionale**

♣ L energia Potenziale gravitazionale e sempre negativa perche abbiamo fissato il valore 0 a distanza infinita. Un lavoro eseguito da una forza esterna sul sistema di particelle produce un aumento della E.P. gravitazionale quando le due particelle vengono separate. Tale aumento si esplica in un minore valore di U; ovvero l E.P.grav. risulta meno negativa al crescere di r. Vediamo infatti che, per un dato sistema di particelle, U varia in funzione di 1/r mentre F con $1/r^2$.

- ENERGIA NEL MOTO DEI PIANETI:

E = K+U (energia totale) *sostituendo* K *e* U...

E = _ m V^2 - GMm/r *Facciamo ora alcune considerazioni a monte:*
la Forza di Gravita e in un certo senso il vincolo della massa in un moto circolare, quindi possiamo porre l ugualianza:

$F_g = F_c$

$GMm/r^2 = mV^2/r$ *moltiplicando per* r/2 *otteniamo:*

$GMm/2r = mV^2/2$ *ovvero...*

_ **mV^2** = GMm/2r *che si puo sostituire nell equazione iniziale ottenendo:*

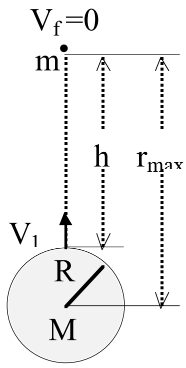
E = GMm/2r - GMm/r *da cui...*

$\boxed{\mathbf{E} = - GMm/2r}$ **Energia Totale per orbite circolari**

♣ Si noti che l energia totale e negativa. Dalla penultima equazione invece appare chiaramente (occhio ai denominatori) che l energia potenziale (secondo membro) e pari al doppio della cinetica. L Energia Totale per orbite ellittiche ha la stessa equazione definitiva che vediamo qui, con la sola variante di avere il semiasse maggiore (a) al posto di r (dimostrazione omessa).

♣ In definitiva possiamo affermare che sia la quantita di moto totale che l energia cinetica totale di un sistema Sole-pianeta sono costanti del moto.

- VELOCITA DI FUGA: valore minimo della velocita iniziale con cui un corpo deve essere lanciato se si vuole che sfugga al campo gravitazionale terrestre. Per sfuggire al campo terrestre l oggetto dovra trovarsi ad una distanza infinita con velocita 0.



$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = E_f$ (conservazione dell energia)

_ m V_i^2 - GMm/R = - GMm/$2r_{max}$ *esplicitando* V_i^2 *si ha:*

$V_i^2 = 2GM\,(1/R - 1/r_{max})$ (velocita iniziale) *ponendo la condizione* r_{max} = infinito *si ha:*

$\boxed{V_{fuga} = \sqrt{2GM/R}}$ **Velocita di Fuga**

♣ Dalla penultima equazione si puo ottenere anche: $V_i^2 = 2GM\,[1/R - 1/(\mathbf{r_{max}}\text{-}\mathbf{R})]$ utile a stimare l altezza max dalla superficie (r_{max}-R) raggiunta da un oggetto di massa m lanciato a velocita iniziale V_i.

11 - MECCANICA DI SOLIDI E FLUIDI

PROPRIETA ELASTICHE DEI SOLIDI

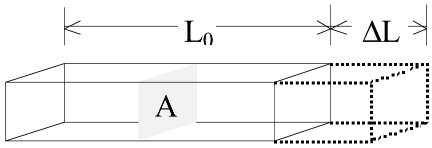
I corpi solidi che fino ad ora abbiamo considerato rigidi e quindi indeformabili, in realta subiscono impercettibili deformazioni, rilevabili macroscopicamente solo su vasta scala. Consideriamo una forza esterna applicata ad un corpo ed una deformazione del corpo conseguente a tale sollecitazione. Definiamo:

◊ **Carico Specifico** (F/A): quantita proporzionale alla forza che causa la deformazione, dove F=*forza agente* e A = *area sezione*.

◊ **Deformazione Relativa**: misura del grado di deformazione. Genericamente: $\Delta x/X$

Per carichi sufficientemente piccoli il Carico Specifico e proporzionale alla Deformazione Relativa attraverso una costante che dipende dal materiale e dal tipo di deformazione. Per ciascun tipo di deformazione tale rapporto e espresso da una grandezza detta *modulo*.

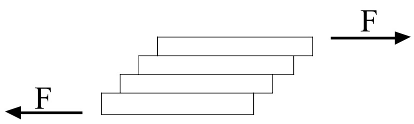
- MODULO DI ELASTICITA (o Modulo di YOUNG): misura la resistenza di un solido alle deformazioni in lunghezza .

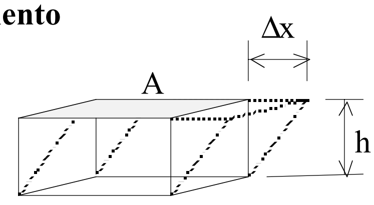


$$\mathbf{Y} = \frac{\text{Carico Specifico}}{\text{Deformazione Relativa}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$ **Modulo di Elasticita**

- MODULO DI SCORRIMENTO: misura la resistenza allo scivolamento di strati sovrapposti all interno del solido.

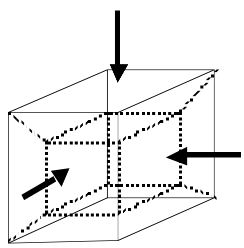
$$\mathbf{S} = \frac{\text{Carico di Scorrimento}}{\text{Deformazione Relativa di Scorrimento}} = \frac{F/A}{\Delta x/h}$$ **Modulo di Scorrimento**





- MODULO DI COMPRESSIBILITA : resistenza del solido alla variazione di volume.

$$\mathbf{B} = \frac{\text{Carico di Volume}}{\text{Deformazione Relativa}} = \frac{F/A}{\Delta v/V}$$ **Modulo di Compressibilita**



Meccanica dei Fluidi

- DENSITA : rapporto tra massa e volume occupato (vale anche per i solidi)

$\boxed{\rho = m/v}$ **Densita**

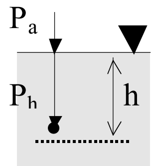
- PRESSIONE: rapporto tra la forza agente e la superficie su cui agisce. Si misura in Pascal: $1\ Pa = 1\ N/m^2$

$\boxed{\mathbf{P} = F/A}$ **Pressione media**

$P = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta F/\Delta A = dF/dA$ **Pressione su un punto** (su un elemento di superficie $\Delta A \to 0$)

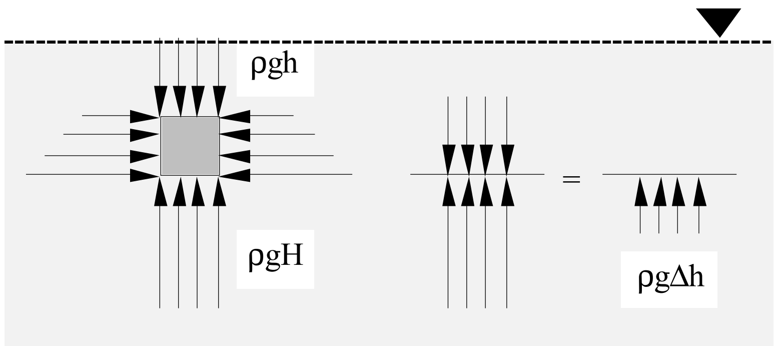
$\boxed{\mathbf{P} = P_a + \rho g h}$ **Pressione unitaria** alla profondita h in un fluido esposto a pressione atmosferica P_a. *Dimostrazione:*

$P_{tot} = P_a + P_h$
$P_h = F/A$ *ma sappiamo che* $F = mg$ *e* $m = \rho V \Rightarrow F = \rho V g$
$P_h = \rho V g/A$ *ma* $V/A = h \Rightarrow P_h = \rho g h$ *...che sostituito nella prima:*
$P = P_a + \rho g h$



♣ PRINCIPIO DI PASCAL: una pressione applicata in un punto di un fluido viene trasmessa invariata in ogni direzione (su questo principio si basa il crick idraulico).

- PRINCIPIO DI ARCHIMEDE: un corpo immerso in un fluido (anche solo parzialmente) riceve una spinta dal basso verso l alto con una forza pari al peso del volume di fluido occupato.



La pressione sull oggetto ha un certo valore sulla superficie superiore. Le superfici laterali sono interessate da una pressione crescente con la profondita secondo la formula:

$\mathbf{P} = P_a + \rho g h$

Tuttavia vediamo che la forza totale agente orizzontalmente su ogni lato (superficie coperta dalle frecce) e uguale e contraria e quindi non produce spostamenti laterali. La forza agente sulla superficie inferiore invece e contraria a quella della superficie superiore ma molto piu forte per effetto della maggiore profondita . La differenza tra la spinta totale sulla superficie superiore e quella sulla superficie inferiore agisce su quest ultima ed e diretta verso l alto. In cifre:

$P = \cancel{P_a} + \rho g h$ *possiamo eliminare* P_a *perche agisce invariata e quindi non incide sul* ΔP *con la profondita .*

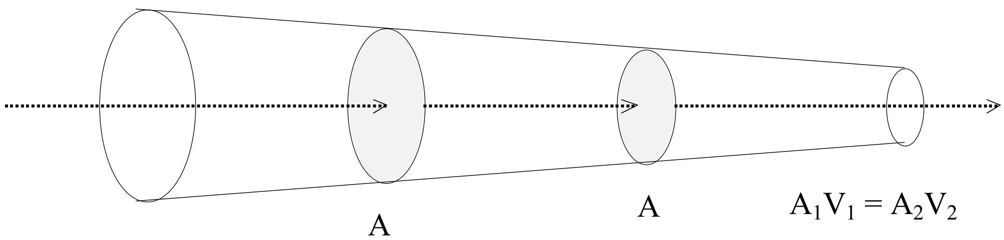
$\Delta P = \rho g \Delta h$ (differenza di pressione con la profondita) *ma* $P = F/A \Rightarrow F = P \cdot A$...

$F = \rho g\ \Delta h \cdot A$ (forza agente dal basso verso l alto a causa del ΔP) *ma* $A \cdot \Delta h = v$...

$F = \rho g v$ *ma non dimentichiamo che* $\rho \cdot v = m$...

$\boxed{\mathbf{F} = mg}$ **Il corpo riceve una spinta dal basso verso l alto pari al peso del volume del fluido che ha occupato.**

- PRINCIPIO DELLA CONTINUITA : dato un fluido che scorre attraverso un tubo di dimensioni non uniformi, la portata sara la stessa in ogni sezione, ovvero in ogni punto del tubo il prodotto dell area della sezione per la velocita e costante.



Partiamo dalla considerazione che il volume di acqua che attraversa una sezione nel tempo Δt *si puo stimare come il prodotto dell area* A *della sezione per la lunghezza* Δx *del cilindro d acqua che riesce ad attraversarla nel tempo fissato:* $v = A \cdot \Delta x$. *Di conseguenza la massa d acqua che attraversa la sezione in quel dato intervallo di tempo sara :*

$\Delta M = \rho v = \rho A \Delta x$ *ma dalla definizione di velocita possiamo esplicitare* $\Delta x = V\Delta t$...

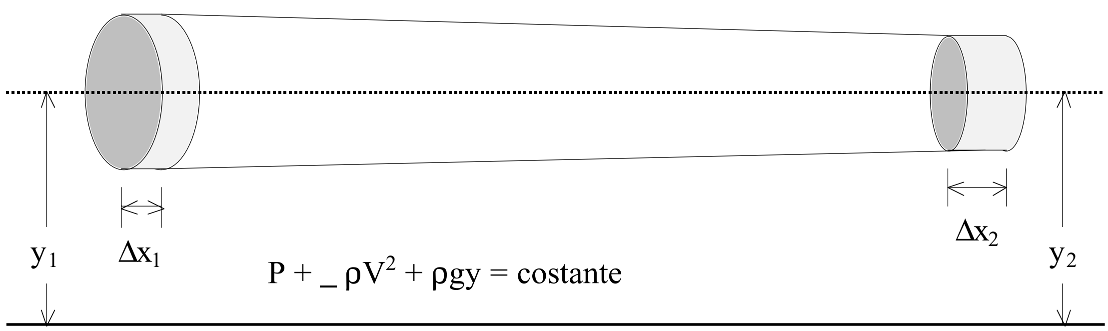
$\Delta M = \rho A V \Delta t$ *Ora, non si puo non ammettere che tanta acqua entra nel tubo e tanta ne deve uscire (a meno che non sia bucato) quindi per due diverse sezioni deve passare la stessa massa d acqua:*

$\Delta M_1 = \Delta M_2 \Rightarrow \cancel{\rho} A_1 V_1 \cancel{\Delta t} = \cancel{\rho} A_2 V_2 \cancel{\Delta t}$ *ovvero...*

$\boxed{A_1V_1 = A_2V_2 = \text{costante}}$ **Principio della continuita**

♣ Conseguenza di cio e una velocita maggiore dove il tubo e piu stretto e una velocita minore dove il tubo e piu largo.

- EQUAZIONE DI BERNOULLI: in qualsiasi punto di un filetto fluido risulta costante la somma della pressione (P), dell energia cinetica per unita di volume (_ ρV^2) e dell energia potenziale per unita di volume ($\rho g y$).



Si consideri un flusso in un tubo di sezione variabile. *<u>Il flusso non deve essere turbolento</u>, ovvero dovremo avere filetti fluidi paralleli. La forza esercitata sulle due sezioni e :*

$F = P\cdot A$ $\quad [(N/m^2)\cdot m^2 = N]$ *il lavoro compiuto da questa forza e :*

$W = F\Delta x = PA\Delta x$ *ma* $A\cdot\Delta x = v$ *e sostituendo possiamo avere il lavoro in ogni sezione...*

$W_1 = P\Delta v_1$

$W_2 = -P\Delta v_2$ *...negativo perche la forza del fluido e opposta allo spostamento.*

Notare che il Δv_1 *sara uguale al* Δv_2 *proprio perche i* Δx *sono diversi, del resto tanta acqua entra e tanta ne deve uscire. Il lavoro complessivo sara allora:*

$W = (P_1-P_2)\,\Delta v$ (lavoro derivato dall espressione forza per spostamento) *ma anche...*

$W = \Delta K + \Delta U$ (definizione energetica del lavoro) *Ugualiando le due si ottiene allora:*

$(P_1-P_2)\,\Delta v = \_\,\Delta m\, V_2^2 - \_\,\Delta m\, V_1^2 + \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$ *dividendo per* Δv *e sapendo* $\rho = \Delta m/\Delta v$...

$P_1 + \_\,\rho V_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \_\,\rho V_2^2 + \rho g y_2$ *ovvero:*

$$\boxed{P + \_\,\rho V^2 + \rho g y = \text{costante}}$$ **Equazione di Bernoulli**

Energia Potenziale per unita di volume

Energia Cinetica per unita di volume

Pressione

12 - TERMODINAMICA

Definizioni generali

- CONTATTO TERMICO: tra due corpi si ha quando puo avvenire uno scambio di calore tra i due senza che essi compiano macroscopicamente lavoro l uno sull altro.
- EQUILIBRIO TERMICO: si ha quando due corpi in contatto termico cessano lo scambio di calore.
- LEGGE ZERO DELLA TERMODINAMICA: se due corpi A e B sono separatamente in equilibrio termico con lo stesso corpo C allora sono in equilibrio termico anche tra di loro.
- TEMPERATURA (T): proprieta che determina se due corpi sono in equilibrio termico (stessa T) oppure no ($T_1 \neq T_2$). La temperatura si misura comunemente in °**K**elvin o °**C**elsius.
  - 1° KELVIN: la frazione 1/273 della temperatura del punto triplo dell acqua.
  - 0° CELSIUS: la temperatura di una miscela di acqua e ghiaccio a P atmosferica (Punto Triplo dell acqua).
  - 100° CELSIUS: la temperatura di una miscela di acqua e vapore in equilibrio alla P atmosferica.
  - CONVERSIONE: K = C + 273
- MOLE: quantita equivalente ad un numero di Avogadro di pezzi.
  - NUMERO DI AVOGADRO (A): $6{,}022 \cdot 10^{23}$ (n°di atomi di carbonio contenuti in 12g di C_6^{12})
  - NUMERO DI MOLI (n): esempio: due moli di patate = $2 \times 6{,}022 \cdot 10^{23}$ patate. Diremo allora di averne n = 2. E come se fosse un super-unita per contare grandi numeri di oggetti. In realta con questa misura conteremo le particelle elementari di cui e composto un gas (molecole o atomi, se monoatomico)
- PESO MOLECOLARE (M): massa diviso numero di moli = massa della molecola

$\boxed{\mathbf{M} = m/n}$ **Peso Molecolare**

$\boxed{\mathbf{n} = m/M}$ **Numero di Moli**

- GAS PERFETTO: la definizione e le caratteristiche di un gas perfetto saranno trattate piu avanti. Per il momento si consideri gas perfetto quello che obbedisce all Equazione di Stato dei gas perfetti in qualsiasi condizione. Per Gas Reale si intenda invece un gas ribelle che pero a basse pressioni si comporta da gas perfetto.

Leggi dei gas

Supponiamo di avere un gas perfetto in un recipiente chiuso (non puo variare il numero di moli). La relazione che lega peso, volume e pressione del gas e funzione del numero di moli:

$\boxed{PV = nRT}$ **Equazione di Stato dei gas perfetti**

T = °K
R = costante universale dei gas: se P = Pa = N/m^3 e V = m^3 ⇒ **R = 8,31** [J / mole·K];
se P = Atm e V = *l* ⇒ R = 0,0831 [litri·Atm / mole·K]
Inoltre, mantenendo costante una delle variabili, al variare delle altre due si avranno le seguenti ugualianze:

$P_0V_0 = PV$ con T = costante
$P_0/T_0 = P/T$ con V = costante
$V_0/T_0 = V/T$ con P = costante

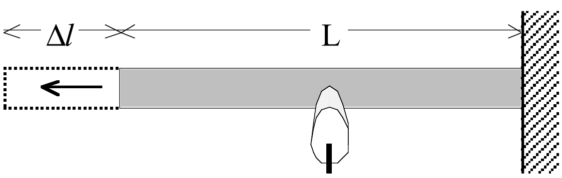
*Poiche il numero effettivo di molecole (*N*) e dato da* n × A *(*A = numero di Avogadro*), possiamo esprimere il numero di moli come:* n = N/A *che, sostituito nell equazione dei gas perfetti...*
PV = nRT = N/A · RT *e quindi, racchiudendo in* K *le costanti* A *ed* R *, si ottiene:*

PV = N**K**T con K = R/A = costante di Boltzmann = $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ [J/K]

Dilatazione nei solidi

Con l equazione di stato dei gas perfetti abbiamo visto che un gas sottoposto ad un incremento di temperatura espande il suo volume e/o aumenta la pressione. Quando invece un corpo solido e sottoposto ad un incremento di temperatura, esso subisce una dilatazione valutabile mediante i seguenti parametri:

- COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE (α):
  dilatazione lungo una direzione (la direzione preferenziale di espansione e quella in cui il



corpo ha la sua massima dimensione).
Espressioni valide solo per piccoli Δt:

$\boldsymbol{\alpha} = \Delta l/(L\cdot\Delta t) =$ % dilatazione $\times 1/\Delta t$	**Coefficiente di Dilatazione**
$\boldsymbol{\Delta l} = \alpha\, L\, \Delta t$	**Dilatazione Lineare**

- COEFFICIENTE DI DILATAZIONE CUBICA (β): per solidi isotropi equivale approssimativamente a tre volte il coefficiente di dilatazione lineare.

$\boldsymbol{\beta} = 3\alpha$	**Coefficiente di Dilatazione**
$\boldsymbol{\Delta V} = 3\alpha\, V\, \Delta t$	**Dilatazione Volumetrica**

- DILATAZIONI AREALI: per fogli o lastre piatte
  $\boldsymbol{\Delta A} = 2\alpha\, A\, \Delta t$

Calore

- CALORE: il flusso di calore tra due corpi e un trasferimento di energia dovuto alla differenza di temperatura tra i corpi stessi.

- CALORIA (cal): la quantita di calore necessaria per aumentare la temperatura di 1g di acqua da 14,5°C a 15,5°C
  - CHILOCALORIA (Kcal): stessa definizione della caloria ma riguardante 1 Kg di acqua.
  - CALORIA CIBO: equivalente a 10^3 cal

- EQUIVALENTE MECCANICO DEL CALORE: il calore e equiparabile all energia meccanica. Qui e riportata semplicemente l equivalenza tra Caloria e Joule per completare una visione panoramica del ruolo della caloria. La dimostrazione attraverso l esperimento di Joule verra trattata in dettaglio piu avanti.

$\boxed{1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}}$ **Equivalente meccanico del calore**

- CAPACITA TERMICA (C): di una sostanza e la quantita di calore necessaria per innalzare di 1°C la sua temperatura

C	**Capacita Termica**	
$\mathbf{c_s} = C/m$	**Calore Specifico**	(C per unita di massa)
$\mathbf{c_n} = C/n$	**Calore Molare** [1]	(C per mole)
	c_n *si puo esprimere anche in funzione del peso molecolare* M*:*	
$C = c_s\, m$	(dalla formulazione del Calore Specifico)	
$n = m/M$	(definizione del numero di moli)	
	sostituendo nella formula di c_n *:* $c_n = C/n = (c_s\, m) / (m/M) = M\, c_s$	
$\mathbf{c_n} = M\, c_s$	**Calore Molare** [2]	

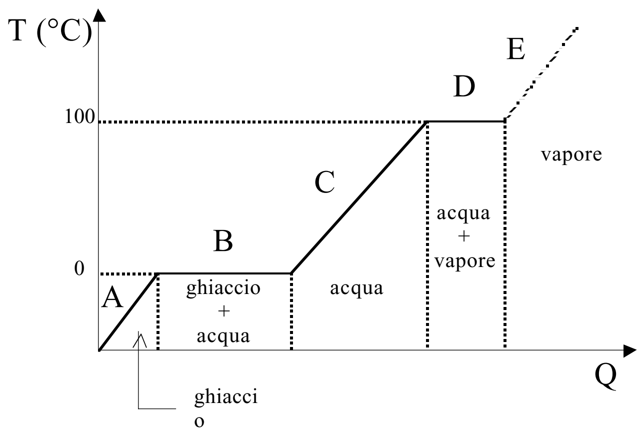
- CALORE RICHIESTO PER INNALZARE LA TEMPERATURA DI UNA SOSTANZA (Q):

Q = $C\cdot\Delta T$ = $m\, c_s\, \Delta T$ = $n\, c_n\, \Delta T$ **Calore necessario per innalzare la temperatura di un ΔT**

- CALORE RICHIESTO PER IL CAMBIAMENTO DI FASE DI UNA SOSTANZA (Q): occorre innanzi tutto introdurre il Calore Latente (L) che dipende sia dal tipo di passaggio di fase che dalle proprieta della sostanza. Per esempio nei passaggi Solido/Liquido e Liquido/Solido avremo rispettivamente un calore latente di fusione e un calore latente di solidificazione, di valore identico. Invece nei passaggi Liquido/Vapore e Vapore/Liquido si avra un altro valore del calore latente, questa volta definito rispettivamente di vaporizzazione o di condensazione. Una sostanza diversa avra altri due valori analoghi per le rispettive coppie di passaggi. Questo calore si dice latente perche e nascosto all interno della sostanza. Si tratta infatti dell energia necessaria alla rottura dei legami reticolari che, nel passaggio Solido/Liquido, viene progressivamente assorbita dal sistema sotto forma di un calore, mentre nel passaggio inverso viene ceduta (gli atomi di un reticolo cristallino hanno minore liberta di movimento e dunque minore energia cinetica rispetto a quelli di un liquido). **L** = **Calore Latente**

$\boxed{Q = m L}$ **Calore richiesto per il cambiamento di fase**

Nel grafico del cambiamento di fase di una sostanza (nell esempio e acqua) possiamo notare l effetto del calore latente come un tratto rettilineo. Nel passaggio S/L infatti, nonostante l aumento di calore apportato al sistema, la temperatura non varia (parte del calore e assorbito), viceversa nel percorso inverso (L/S) nonostante la sottrazione di calore, la temperatura rimane invariata a causa di un apporto endogeno di calore che fino ad allora era nascosto o latente. Notare inoltre che il calore latente di Vaporizzazione o Condensazione e di minore entita (tratto rettilineo piu corto). Per definire la quantita Q di calore in gioco si applicano entrambe le formule.

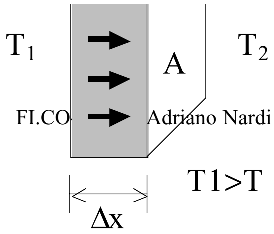


A: $Q = mC\Delta T$ (con C del ghiaccio)
B: $Q = mL$ (con L di fusione o solidif.)
C: $Q = mC\Delta T$ (con C dell acqua)
D: $Q = mL$ (con L di vaporizz. o cond.)
E: $Q = mC\Delta T$ (con C del vapore)

- CONDUZIONE DEL CALORE: la velocita con cui si propaga il calore in un oggetto e direttamente proporzionale alla sezione e alla temperatura e inversamente proporzionale allo spessore.

$\boxed{Q/\Delta T \propto A\,(\Delta T/\Delta x)}$ **Velocita di propagazione del calore**

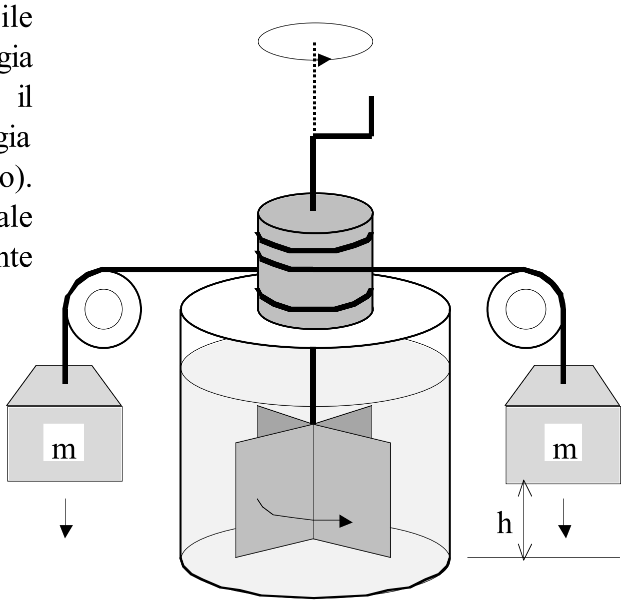
Per uno spessore infinitesimo dx *e una differenza di temperatura* dt :



$dQ/dt = - k\,A\,(dT/dx)$ **Legge della Conduzione del calore**

dove sono state introdotte due nuove grandezze:
k = conducibilita termica del materiale
dT/dx = gradiente di temperatura (variazione di T da punto a punto lungo una direzione)

- EQUIVALENTE MECCANICO DEL CALORE: mediante l esperimento di Joule e possibile valutare l equivalenza tra calore ed energia meccanica (piu avanti vedremo infatti come il calore di un corpo sia determinato dall energia cinetica delle particelle che lo compongono). L esperimento consiste nel far ruotare delle pale all interno di un recipiente isolato contenente acqua. Le pale vengono azionate dalla caduta di due gravi. Se il perno non produce attrito, l aumento di temperatura dell acqua conseguente al movimento delle pale deve provenire interamente dall energia meccanica prodotta dalla caduta dei gravi (2mgh). Si puo allora dimostrare che la variazione di temperatura e proporzionale all energia meccanica dissipata.

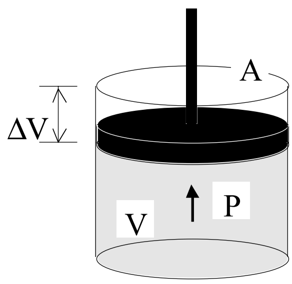


La costante di proporzionalita e **4,186** [J/g·°C]. Ricollegandoci al concetto di caloria (vedi inizio capitolo) possiamo allora affermare che:

⇒ **4,186 J di energia meccanica alzano la temperatura di 1g d acqua da 14,5 a 15,5 °C.**

⇒ $\boxed{\textbf{1 cal = 4,186 J}}$

- LAVORO E CALORE: si consideri un sistema cilindro-pistone contenente un gas che all equilibrio occupa un volume V ed esercita una pressione P sulle superfici del cilindro. Se il cilindro ha una sezione di area A, la forza esercitata dal gas sul pistone sara $F = P \cdot A$ [dimensionalmente: $(F/A) \cdot A = F$]. Se il gas si espande in modo quasi-statico (cioe tanto lentamente da permettere al sistema di cambiare stato attraverso una serie infinita di stati di equilibrio), dopo uno spostamento Δy del pistone il lavoro compiuto dal gas sul pistone sara :
$\Delta W = F \cdot \Delta y = P \cdot A \cdot \Delta y$ *dove* $A \cdot \Delta y = \Delta V$ *e l aumento di volume del gas. Si puo scrivere allora:*



$\boxed{\Delta W = P \cdot \Delta V}$ **Lavoro compiuto da un gas**

Dunque il lavoro compiuto da un gas sara zero se non esiste variazione di volume, mentre per variazioni da un volume iniziale V_i ad un volume finale V_f si avra :

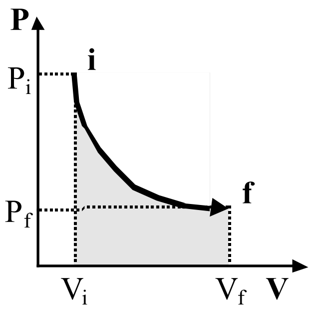
$\mathbf{W} = \int_{V_i} PdV$

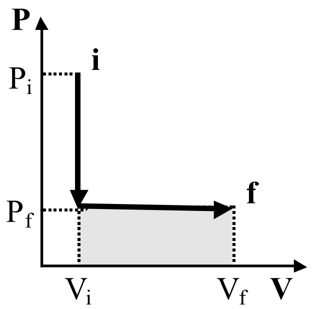
Lavoro compiuto da un gas

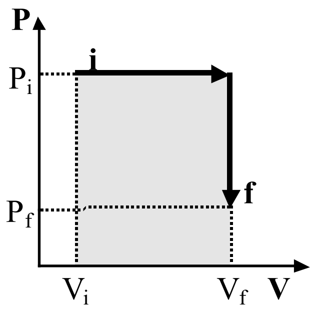
Il lavoro e inoltre positivo se ΔV e positivo, cioe se il gas si espande e quindi se compie lavoro sul pistone, viceversa e negativo quando ΔV e negativo, cioe il gas viene compresso dal pistone e quindi il lavoro e compiuto dall esterno sul sistema.

♣ Per equilibrio si intendeva un gas in cui ogni sua parte si trova alla stessa pressione e temperatura ed una trasformazione quasi statica e una trasformazione in cui in ogni istante il gas si puo considerare in equilibrio. Se il gas e in equilibrio, nel rispetto della la legge dei gas perfetti (PV=nrT), saremo in grado di conoscere le variabili in ogni istante della trasformazione.

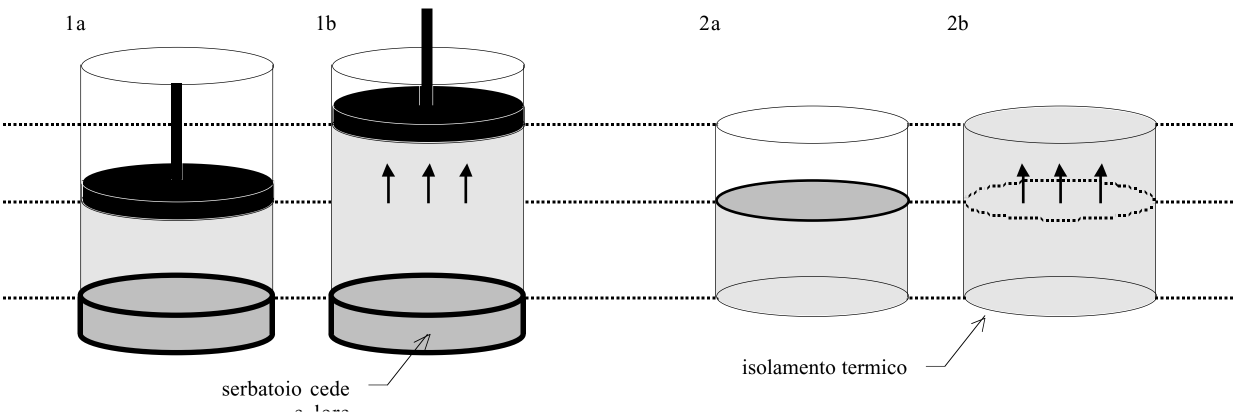
La pressione del gas durante la trasformazione dipende da P e T secondo la legge dei gas perfetti. Conoscendo in ogni istante i valori di P e V, il lavoro puo essere rappresentato come l area sotto la curva di un diagramma PV. Appare evidente dai grafici seguenti che: **Il lavoro eseguito da un gas dipende dagli stati iniziale e finale e dal cammino itermedio tra questi stati**.







Lo stesso discorso fatto per il lavoro vale anche per il calore: la quantita di calore ceduto o acquisito dal sistema durante una trasformazione dipende dagli stati iniziali e finali ma anche dal percorso seguito nella trasformazione. Si puo dimostrare brevemente confrontando due sistemi in cui verranno operate trasformazioni diverse tra i medesimi stati iniziali e finali.



Nella prima figura l espansione di un gas (la cui pressione deve essere infinitesimamente maggiore di quella atmosferica, altrimenti non si espande) compie lavoro sul pistone mentre il sistema assorbe calore da un serbatoio (altrimenti il variare di V farebbe variare T). Nella seconda figura un gas alla e stesse condizioni iniziali si espande fino alle stesse condizioni finali del primo. L espansione pero avviene a seguito della rottura di una membrana (senza spingere il pistone) e le pareti del cilindro sono isolate (espansione libera adiabatica, vedi pag. seguente). Nel primo caso abbiamo avuto $\Delta Q \neq 0$, nel secondo un $\Delta Q=0$. Ecco che anche la quantita di calore, a parita di condizioni iniziali e finali, dipende dal tipo di trasformazione. Notare anche che nel primo caso si e avuto $\Delta W \neq 0$, mentre nel secondo $\Delta W=0$.

♣ Come vedremo tra poco, infatti, questa dipendenza comune dal percorso seguito in una trasformazione lega lavoro e quantita di calore in modo che durante la stessa trasformazione nessuna delle due quantita potra conservarsi indipendentemente l una dall altra. Vedremo anche che la relazione tra le due dipende appunto dal tipo di trasformazione.

I Principio della Termodinamica

Si tratta praticamente dell estensione alle trasformazioni termodinamiche della gia nota Legge di Conservazione dell Energia che si puo quindi considerare universalmente valida sia per il mondo macroscopico che per quello microscopico. Naturalmente qui verra espressa in termini diversi, resta pero uguale il concetto.

Definiamo variazione dell energia interna del sistema ΔU la quantita Q-W:

$\boxed{\Delta U = Q - W}$ **Prima legge della Termodinamica**

cio perche e verificabile che in un sistema termodinamico che subisce una qualsiasi trasformazione da uno stato iniziale ad uno stato finale, qualunque sia la quantita di calore Q assorbita o ceduta, qualunque sia il lavoro W eseguito o subito, la quantita (Q-W) e la stessa per qualsiasi tipo di trasformazione, anche se Q e W, misurati singolarmente, dipendono dal percorso seguito.

Ecco una panoramica di conseguenze e applicazioni del primo principio:

- SISTEMI TOTALMENTE ISOLATI (sistemi che non interagiscono con l ambiente):
  $Q = 0$ e $W = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta U = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{U = costante}$

- TRASFORMAZIONI CICLICHE (cioe quando lo stato finale e uguale allo stato iniziale):
  $\Delta U = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{Q = W}$ inoltre il lavoro e equivale all area racchiusa nel ciclo del diagramma PV

- TRASFORMAZIONI ADIABATICHE (sistema termicamente isolato):
  $Q = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\Delta U = -W}$

- TRASFORMAZIONI ISOBARE (trasformazioni a pressione costante):
  $Q \neq 0$ e $W \neq 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\Delta U = Q-W}$ e inoltre $\mathbf{W = P \cdot \Delta V}$ con $P = $ costante

- TRASFORMAZIONI ISOCORE (trasformazioni a volume costante):
  $W = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\Delta U = Q}$

- TRASFORMAZIONI ISOTERME (trasformazioni a temperatura costante):

$\Delta U = 0$ perche l energia interna di un gas perfetto e solo funzione di T (lo vedremo tra poco)

- LAVORO NELL ESPANSIONE ISOTERMA DI UN GAS PERFETTO: *se la trasformazione avviene in modo quasi-statico si potra applicare in ogni punto del percorso la legge dei gas perfetti* PV = nrT *e quindi* P = nrT/V. *Allora il lavoro si potra esprimere come:*

$$W = \int_{V_i} PdV = \int_{V_i} \frac{nrT}{V} dV$$ T *e costante per definizione. Portando fuori le costanti...*

$$W = nrT \int_{V_i} \frac{dV}{V}$$ *ma sapendo che* $\int \frac{dX}{X} = \ln X$, *possiamo risolvere...*

$$\mathbf{W} = \left[nrT(\ln V)\right]_{Vi}^{Vf} = \mathbf{nrT \ln (V_f / V_i)}$$ **Lavoro compiuto in una trasformazione isoterma**

♣ Abbiamo gia visto che affinche una trasformazione avvenga in modo quasi-statico deve svolgersi molto lentamente. La stessa lentezza e richiesta per ottenere una trasformazione isoterma, in modo che vi sia tutto il tempo necessario perche il calore possa essere trasferito dall ambiente al sistema o viceversa, mantenendo dunque l equilibrio termico con l esterno. Se invece si desidera una trasformazione adiabatica (nessuno scambio termico) senza avere un contenitore isolante, occorrera eseguire il passaggio molto rapidamente per non lasciare il tempo di cedere o ricevere calore. Non sara pero una condizione quasi-statica.

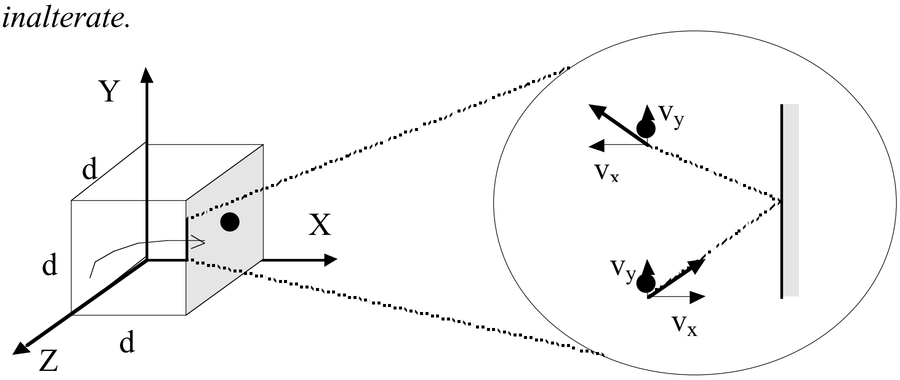
Teoria Cinetica dei Gas

Fino ad ora abbiamo parlato di gas perfetto come di un gas che rispetta la legge di stato dei gas perfetti . In realta un gas deve rispondere a determinate caratteristiche fisiche per potersi comportare in conformita a questa legge. E necessario dunque definire un modello molecolare del gas perfetto. Vedremo inoltre l interpretazione atomica delle grandezze macroscopiche.

- MODELLO MOLECOLARE DEL GAS PERFETTO:
  1. **le particelle sono puntiformi**: il gas deve essere monoatomico o comunque le particelle devono avere un volume del tutto trascurabile cosicche il volume totale deve essere uguale al volume libero effettivo, cioe non deve essere attribuito nessun volume allo spazio materialemnte occupato dalle particelle del gas;
  2. **le particelle si muovono casualmente obbedendo alle tre leggi della dinamica**: si muovono in ogni direzione con uguale probabilita e varie velocita ;
  3. **le particelle subiscono urti perfettamente elastici tra di loro e con il contenitore**: si devono quindi considerare prive di struttura (ancora una volta puntiformi) e devono conservarsi quantita di moto ed energia cinetica;

4. **le forze molecolari (gravita , elettrica, magnetica) sono trascurabili**: non sono trascurabili solo le forze a corto raggio, quindi le particelle interagiscono tra loro solo durante l urto e gli urti non saranno determinati da queste forze;
5. **si tratta di un gas puro**: tutte le molecole sono identiche.

- INTERPRETAZIONE MOLECOLARE DELLA PRESSIONE: la pressione che un gas esercita sulle pareti di un contenitore e causata dagli urti delle sue molecole sulle le pareti.
  Si consideri un gas ideale costituito da **N** *molecole che si muovono a velocita* **v** *in un contenitore cubico di lato* **d** *e volume* **V**. *Vediamo ora le conseguenze dell urto di una molecola sulla faccia perpendicolare all asse* X. *La componente* v_x *della velocita* V *si inverte mentre le altre* (v_y *e* v_z) *rimangono inalterate.*



La componente X *della quantita di moto sara allora* mv_x *prima dell urto e* $-mv_x$ *dopo l urto, la variazione di quantita dimoto nell urto sara allora:* $\Delta P = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$ *e poiche la quantita di moto viene conservata (l urto e elastico nel gas reale), la quantita di moto trasferita al muro e* $\mathbf{P = 2mv_x}$. *Consideriamo ora che per avere due urti successivi sulla stessa parete la molecola dovra percorrere lungo* X *un tratto* 2d *che , per la definizione stessa di velocita , dovra essere uguale a* $v_x\Delta t$, *quindi possiamo dire che due urti sono separati da un tempo* $\mathbf{\Delta t = 2d/v_x}$.
Se F *e la forza media esercitata da una molecola sulla parete nel tempo* Δt, *per la definizione di impulso (equivalente alla variazione della quantita di moto) possiamo esprimere l uguaglianza:*
$F\Delta t = \Delta P = 2mv_x$ *da cui esplicitando F e sostituendo Δt otteniamo...*

$$F = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2d/v_x} = \frac{mv_x^2}{d}$$ **Forza esercitata da una particella urtando la parete**

La forza totale esercitata sulla parete e data dalla sommatoria di questi valori per tutte le N *particelle. La pressione totale invece si ottiene dividendo la forza totale per l area* d^2*:*

$$P = (\Sigma F)/A = (m/d^3)\,(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)$$

Considerando inoltre: *componenti* x *delle velocita per le* N *particelle*

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N}$$ (Media delle componenti x delle velocita)

$d^3 = V$ (Volume) *e sostituendo nell espressione della pressione:*

$$\mathbf{P} = \frac{Nm}{V}\,\overline{v_x^2}$$ **Pressione totale** (limitata alle componenti x)

Non esistendo alcuna direzione preferenziale per gli urti, i valori medi delle tre componenti della velocita devono essere uguali: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = 1/3\ \overline{v^2}$ *quindi la pressione totale effettiva:*

$$\boxed{P = 1/3 \frac{Nm}{V} \overline{v^2}}$$

Pressione di un gas come funzione della velocita media delle particelle

Ma la quantita mN *(la massa m di una molecola moltiplicata per il numero totale di molecole) rappresenta la massa totale del gas che e anche esprimibile come* nM *(numero di moli per peso molecolare). Possiamo allora riformulare l espressione come:*

$$\boxed{P = \frac{nM}{V} \overline{v^2}}$$

Pressione totale di un gas (formula equivalente)

Inoltre giocando sulle frazioni la prima espressione puo essere riformulata in modo da esprimere l energia cinetica delle particelle:

$$\boxed{P = 2/3 \frac{N}{V} (\_\ m\overline{v^2})}$$

Pressione totale come funzione della energia cinetica media delle particelle

♣ In definitiva siamo passati dal microscopico al macroscopico verificando che la pressione che un gas esercita sulle pareti del contenitore altro non e che l effetto degli urti delle sue particelle con il contenitore stesso; essa dipende infatti dalla velocita e di conseguenza anche dall energia cinetica delle molecole.

- INTERPRETAZIONE MOLECOLARE DELLA TEMPERATURA: anche la temperatura di un gas e funzione dell energia cinetica delle sue molecole.
  Se dall ultima equazione vista esplicitiamo anche V *otteniamo una forma interessante...*
  $PV = 2/3\ N\ (\_\ m\overline{v^2})$ *...che ci ricorda la versione Boltzman dell equazione di stato:*
  $PV = N\ k\ T$ *Eguagliando i secondi membri ed esplicitando* T *otteniamo:*

$$\boxed{T = \frac{2}{3k} (\_\ m\overline{v^2})}$$

Temperatura assoluta del gas come funzione dell energia cinetica media delle particelle

Possiamo quindi misurare l energia cinetica media delle particelle conoscendo la temperatura del gas (dal macroscopico al microscopico):

$$\boxed{\_\ m\overline{v^2} = 3/2\ k\ T}$$

Energia cinetica media per molecola

- EQUIPARTIZIONE DELL ENERGIA: l energia di un sistema in equilibrio termico e ugualmente suddivisa tra tutti i gradi di liberta .
  Semplicemente, abbiamo gia visto che la velocita media e data dalla somma delle tre componenti spaziali della velocita e che ciascuna delle tre ha la medesima probabilita (non esistono direzioni preferenziali). Quindi possiamo ragionevolmente dire che anche l energia cinetica media (funzione della velocita media) e equiripartita nelle tre direzioni spaziali nella misura di 1/3 su ciascuna. In sostanza per una singola componente (poniamo la x*):*

$$\boxed{\_\ m\overline{v_x^2} = \_\ k\ T}$$

Energia cinetica media nella direzione x

- ENERGIA CINETICA TOTALE: e l energia cinetica media moltiplicata per le N molecole.

$\mathbf{E} = N\,(\_\ mv^2) = 3/2\ \boxed{Nk}\ T = 3/2\ \boxed{nR}\ T$ **Energia cinetica totale per N molecole**

vedi Boltzman

- VELOCITA QUADRATICA MEDIA: (la velocita media che le particelle hanno tra un urto e l altro, non quella con cui risultano spostarsi da un luogo all altro, che e invece condizionata da innumerevoli urti e deviazioni). *Si esplicita* v *dall equazione dell energia cinetica media:*

$\mathbf{v_{qm}} = \sqrt{\overline{v}^2} = \sqrt{3kT/m} = \sqrt{3RT/M}$ **Velocita quadratica media**

♣ Si puo dedurre che a parita di temperatura le molecole piu leggere si muovono piu velocemente di quelle piu pesanti (parliamo chiaramente di due gas diversi; ogni gas reale e omogeneo).

- ENERGIA INTERNA DI UN GAS MAONOATOMICO: riscaldando un gas monoatomico (approssimabile a particelle senza struttura, come un gas ideale) tutta l energia fornita va ad incrementare l energia cinetica media delle sue particelle (considerate puntiformi, non ci dobbiamo preoccupare di vibrazioni o rotazione attorno al centro di massa) possiamo quindi esprimere l energia interna del gas analogamente all energia cinetica totale:

$\boxed{\mathbf{U} = 3/2\ Nk\ T = 3/2\ nR\ T}$ **Energia interna di un gas monoatomico**

Se il calore viene fornito al gas mantenuto a volume costante, il lavoro e nullo e per il Primo Principio della Termodinamica:

$\boxed{\mathbf{Q} = \Delta \mathbf{U} = 3/2\ Nk\ \Delta T = 3/2\ nR\ \Delta T}$ **Calore scambiato a volume costante**

CALORE MOLARE DI UN GAS PERFETTO:

ricordando che:

$\mathbf{Q} = C \cdot \Delta T$ **Calore richiesto per innalzare la temperatura**

$\mathbf{c_n} = C/n$ **Calore molare** (entrambi a pag. 37) *possiamo formulare un* Q *in funzione del calore molare e sostituire nella formula del calore scambiato ottenendo:*

$\mathbf{Q} = n\ c_n\ \Delta T = 3/2\ n\ r\ \Delta T$ *da cui, esplicitando* c_n*, otteniamo:*

$\boxed{c_n = 3/2\ r = c_v}$ **Calore molare in un gas perfetto <u>a volume costante</u>**

Consideriamo ora due trasformazioni che avvengono una a pressione costante ed una a volume costante ma entrambe con la medesima variazione di temperatura:

- Trasf$_1$: $V = \text{cost.}$ $\quad T_{1f} - T_{1i} = \Delta T \quad \Delta U_1 = Q - W = Q = n\, c_v\, \Delta T$
  (W=PΔV ma qui V=cost. ⇒ W=0)
- Trasf$_2$: $P = \text{cost.}$ $\quad T_{2f} - T_{2i} = \Delta T \quad \Delta U_2 = Q - W = n\, c_p\, \Delta T - P\Delta V = n\, c_p\, \Delta T - n\, r\, \Delta T$
  (PΔV = nRΔT)

In entrambe le funzioni di U *abbiamo tutte costanti tranne* ΔT. *Dunque se entrambi i* ΔU *sono funzioni di* ΔT *e* ΔT *e lo stesso, allora* $\Delta U_1 = \Delta U_2$. *Uguagliando le espressioni otteniamo:*

$\cancel{n}\, c_v\, \cancel{\Delta T} = \cancel{n}\, c_p\, \cancel{\Delta T} - \cancel{n}\, r\, \cancel{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad c_v = c_p - r$ *...da cui:*

$\boxed{c_p - c_v = r}$ **Relazione tra C_P e C_V**

Quindi, sapendo che $c_v = 3/2\ r$, *avremo* $c_p = 3/2\ r + r = 5/2\ r$

$\boxed{c_p = 5/2\ r}$ **Calore molare in un gas perfetto <u>a pressione costante</u>**

$c_p/c_v = (5/2\ r) / (3/2\ r) = 5/3 = 1{,}67$ [*grandezza adimensionale*]

$\boxed{\gamma = 1{,}67}$ **Rapporto tra i calori molari in un gas perfetto** (e quindi monoatomico)

- CALORI MOLARI IN UN GAS BIATOMICO: oltre al moto traslazionale in tre dimensioni, nel caso di molecole biatomiche avremo anche un moto rotazionale in cui contano solo due dimensioni ed un moto vibrazionale che non e rilevante. Avremo in totale **5 gradi di liberta** .
  Come abbiamo gia visto ogni grado contribuisce per _kT, dunque possiamo dire:
  U = 3N (_kT) + 2N (_kT) = 5/2 NkT = 5/2 nrT *ma sapendo che*
  $U = n\, c_v\, \Delta T$ *deduciamo per confronto che*

$\boxed{c_v = 5/2\ r}$ **Calore molare in un gas <u>biatomico</u> a volume costante**

e quindi, poiche $c_p - c_v = r$ *possiamo calcolare facilmente...*

$\boxed{c_p = 7/2\ r}$ **Calore molare in un gas <u>biatomico</u> a pressione costante**

e di conseguenza, calcolando il rapporto c_p/c_v *otterremo...*

$\boxed{\gamma = 1{,}40}$ **Rapporto tra i calori molari in un gas biatomico**

TRASFORMAZIONE ADIABATICA IN UN GAS PERFETTO:

In una trasformazione adiabatica, per definizione, si ha Q=0. *Dunque, per il primo principio della termodinamica avremo:* $\Delta U = Q - W = -W = -P\Delta V$

Inoltre poiche ΔU *e funzione solo della temperatura, e nel caso di* V=cost. *avevamo* $Q = n\,c_v\,\Delta T$, *se il* ΔT *e della stessa entita , anche qui possiamo dire che* $\Delta U = Q = n\,c_v\,\Delta T$. *In definitiva...*

$$\begin{cases} \Delta U = -P\Delta V \\ \Delta U = n\,c_v\,\Delta T \end{cases} \qquad \textit{da cui:} \quad n\,c_v\,\Delta T = -P\Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta T = -(P\Delta V)/(n\,c_v)$$

Ora consideriamo: $PV = nrT \quad \Rightarrow \quad P\Delta V + V\Delta P = nr\,\Delta T$ *...sostituendoci* ΔT *si avra :*

$$P\Delta V + V\Delta P = -\cancel{n}r\,\frac{P\Delta V}{\cancel{n}\,c_v}$$ *sostituendo ora* $r = c_p - c_v$ *si ottiene:*

$$P\Delta V + V\Delta P = \frac{c_v - c_p}{c_v}(P\Delta V)$$ *ma* $\frac{c_v}{c_v} - \frac{c_p}{c_v} = 1 - \gamma$ *che sostituito...*

$$P\Delta V + V\Delta P = (1-\gamma)(P\Delta V)$$ *svolgendo il prodotto...*

$$\cancel{P\Delta V} + V\Delta P = \cancel{P\Delta V} - \gamma P\Delta V \quad \Rightarrow \quad V\Delta P + \gamma P\Delta V = 0$$ *Ora, dividendo questa per* PV, *si ha:*

$$\frac{\cancel{V}\Delta P}{P\cancel{V}} + \gamma\frac{\cancel{P}\Delta V}{\cancel{P}V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} + \gamma\frac{\Delta V}{V} = 0$$ *Per intervalli* ΔP *e* ΔV *infinitesimi avremo:*

$$\int\left[\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln P + \gamma \ln V = \ln 1 = \text{costante}$$ *E quindi...*

$\boxed{PV^{\gamma} = \text{costante}}$ **Relazione tra P e V in una trasformazione adiabatica**

Per P = cost. *avremo inoltre:* $V_0/T_0 = V/T \Rightarrow V^{\gamma}_0/T_0 = V^{\gamma}/T \Rightarrow T_0/V^{\gamma}_0 = T/V^{\gamma} \Rightarrow T_0V_0^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1}$

$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{costante}}$ **Relazione tra T e V in una trasformazione adiabatica**

In conclusione, nella trasformazione adiabatica di un gas perfetto avremo:

$\boxed{P_iV_i^{\gamma} = P_fV_f^{\gamma}}$

$\boxed{T_iV_i^{\gamma-1} = T_fV_f^{\gamma-1}}$

Relazioni tra stati iniziali e finali nella trasf. adiabat. di un gas perfetto

♣ Si ricordi che una trasformazione adiabatica esclude lo scambio di calore con l esterno. Una trasformazione adiabatica quasi-statica deve quindi avvenire in un tempo abbastanza lento da garantire al sistema mantenimento dell equilibrio ma sufficientemente rapido da impedire lo scambio di calore con l esterno (nessun isolante e perfetto).

Macchine termiche

Una macchina termica e un dispositivo che fa compiere ad una sostanza una trasformazione ciclica; al termine del ciclo la sostanza torna allo stato iniziale. Durante tale ciclo il sistema assorbe calore, compie lavoro e cede nuovamente calore.

- LAVORO COMPIUTO DA UNA MACCHINA TERMICA: il lavoro prodotto sara uguale alla differenza tra il calore ricevuto dalla sorgente calda Q_h e il lavoro ceduto alla sorgente fredda Q_c (dall inglese *hot* = caldo e *cold* = freddo).

  $\boxed{W = Q_h - Q_c}$ **Lavoro compiuto da una macchina termica**

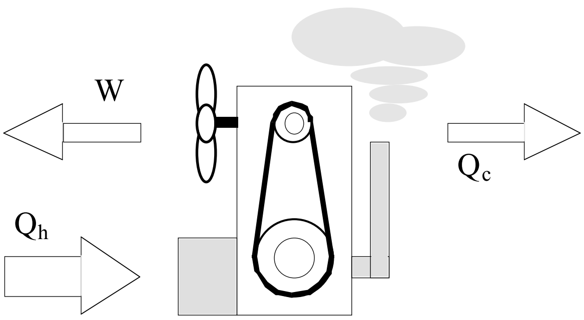
  Questo lavoro equivale all area circoscritta dalla curva del diagramma PV.

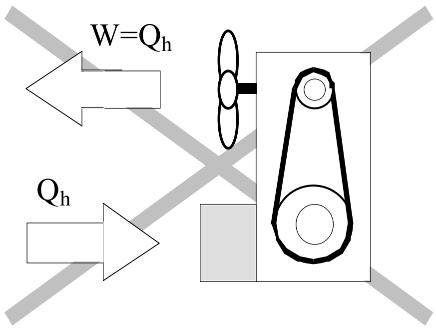
- RENDIMENTO DI UNA MACCHINA TERMICA (e): e definito come il rapporto tra il lavoro totale eseguito dalla macchina ed il calore totale assorbito durante il ciclo.
  $e = W/Q_h = (Q_h - Q_c)/Q_h$

  $\boxed{e = 1 - (Q_c / Q_h)}$ **Rendimento di una macchina termica**

♣ Da qui si puo dedurre che una macchina termica avrebbe un rendimento del 100% (e =1) quando Q_c=0, cioe se tutto il calore fornito si trasformasse interamente in lavoro, senza il rilascio di calore residuo. E possibile che cio avvenga ?

- II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA: puo essere enunciato in molti modi. In sostanza sentenzia sempre quali processi non possono avvenire in una macchina termica. In questo caso utilizzeremo l enunciato di Kelvin-Planck: *E impossibile realizzare una macchina termica che, operando un ciclo, assorba energia termica e rilasci una uguale quantita di lavoro* ovvero, il rendimento di una macchina termica non puo mai essere mai del 100%.

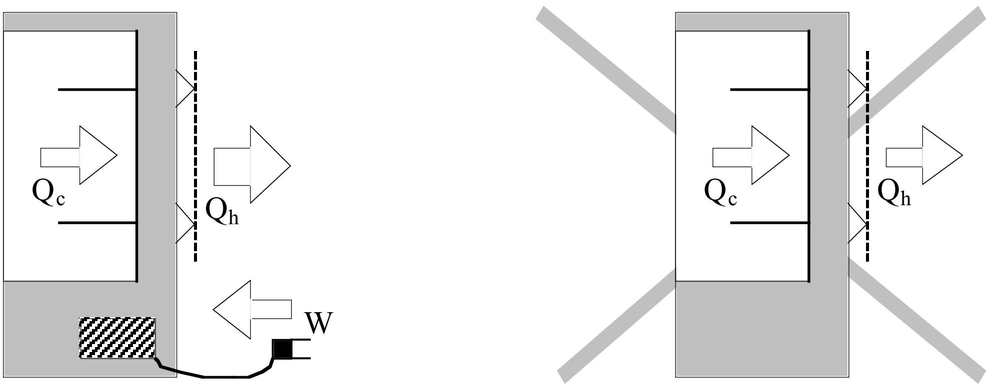




- POMPA DI CALORE: e una macchina termica che funziona in senso inverso (in pratica e un frigorifero). Attraverso l azione del lavoro compiuto dall esterno sul sistema (motore elettrico) permette il trasferimento di calore da una sorgente fredda (mozzarella) ad una sorgente calda (l aria della stanza). Vale ancora la stessa legge delle macchine termiche mentre il rendimento si calcola con il rapporto inverso.

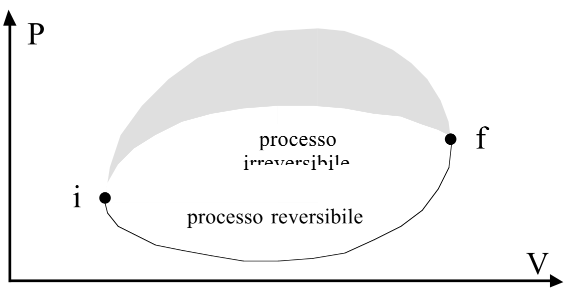
♣ Il frigorifero cede all ambiente piu calore di quanto non ne sottrae dalle vivande. Cio avviene attraverso un radiatore situato all esterno della parete posteriore. Il frigorifero ideale dovrebbe rilasciare all esterno lo stesso calore che sottrae al suo interno e senza che venga compiuto lavoro dall esterno (senza consumare corrente elettrica). E possibile ?

- II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (enunciato di Clausius): *e impossibile realizzare una macchina termica in cui non risultino altri effetti che il trasferimento di calore da un corpo freddo ad un corpo caldo* . Il calore puo fluire senza difficolta da un corpo caldo ad uno freddo ma per ottenere l inverso occorre compiere lavoro sul sistema.



- REVERSIBILITA E IRREVERSIBILITA DELLE TRASFORMAZIONI: le trasformazioni termodinamiche reali hanno una direzione privilegiata. Ponendo in contatto termico due corpi di diversa temperatura il calore passa spontaneamente dal corpo caldo a quello freddo ma non puo tornare in dietro a meno che non si compia lavoro sul sistema (frigorifero). La trasformazione e quindi irreversibile.
  Una trasformazione e sempre reversibile se il sistema passa dallo stato iniziale allo stato finale attraverso una serie di stati di equilibrio (trasformazione quasi-statica). In questo caso in ogni punto della trasformazione si avranno ben noti i valori di P, V e T.

  Una trasformazione irreversibile passa dallo stato iniziale a quello finale attraverso una serie di stati di non-equilibrio, non rappresentabili come una curva sul diagramma PV (P e V non hanno un unico definito valore ma sono piccole aree, come illustrato nella figura).

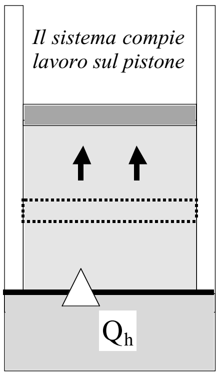


- LA MACCHINA DI CARNOT: e una macchina ideale nella quale il sistema compie il massimo lavoro che e possibile eseguire con la quantita di calore disponibile. Fornisce quindi il massimo rendimento ottenibile da una macchina termica.

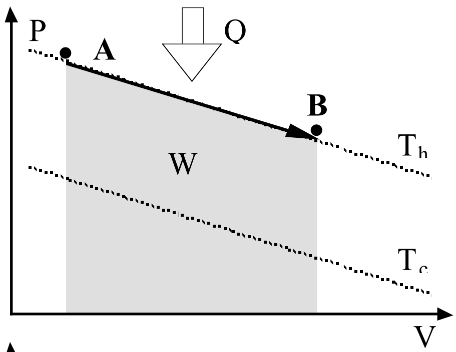
La macchina e costituita da un gas perfetto contenuto in una cavita cilindrica termicamente isolata e chiusa da un pistone mobile. La base del cilindro puo essere posta a contatto termico con un serbatoio di calore. Si operera un ciclo di quattro fasi tra le temperature T_h e T_c fornite alternativamente da due serbatoi di calore. Si avranno due trasformazioni adiabatiche e due isoterme, tutte reversibili.

CICLO DI CARNOT:

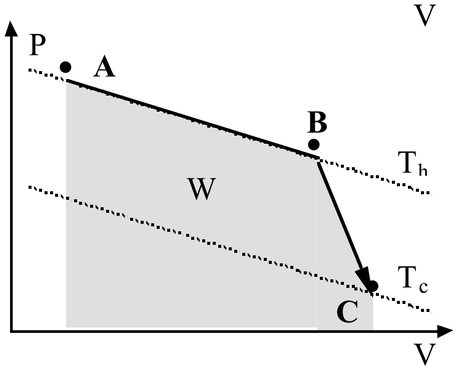
1. La trasformazione da A→B (dalla situazione di partenza A alla situazione di partenza B) e un **espansione isoterma** alla temperatura T_h fornita costantemente dal serbatoio caldo posto a contatto termico con la base. La quantita di calore Q_h viene ceduta al gas che espandendosi compie un lavoro W_{AB} spostando il pistone.
2. La trasformazione B→C e un **espansione adiabatica** in quanto il serbatoio e stato rimosso e il contenitore risultera termicamente isolato. Il gas esegue il lavoro W_{BC} spingendo il pistone ma espandendosi la sua temperatura scende da T_h a T_c.
3. La trasformazione C→D e una **compressione isoterma** alla temperatura T_c perche durante la compressione una quantita di calore Q_c verra rilasciata dal gas al serbatoio freddo (a temperatura T_c posto ora in contatto termico con la base del cilindro, non piu isolata. La pressione del pistone sul gas esegue sul sistema un lavoro W_{CD}.
4. La trasformazione D→A e una **compressione adiabatica** (la base del cilindro viene di nuovo isolata). Ora non puo piu essere ceduto calore all esterno e durante la compressione la temperatura del gas sale da T_c a T_h. Il lavoro eseguito sul sistema e W_{DA}.

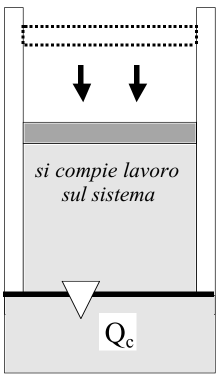


A→B: Espansione Isoterma

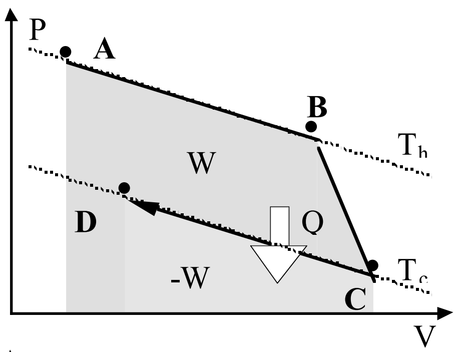


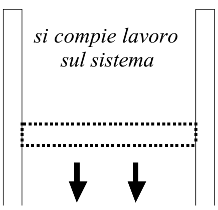
B→C: Espansione Adiabatica

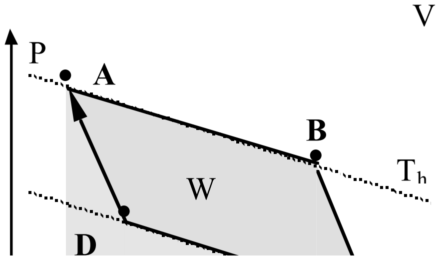




C→D: Compressione Isoterma







D→A: Compressione Isoterma

Entropia

L Entropia e la misura del disordine di un sistema (concetto abbastanza astratto per noi poveri geologi). Si tratta di una funzione di stato legata al II principio della termodinamica, che infatti puo essere enunciato anche in questo modo (il terzo fin ora): *Se una trasformazione avviene in un sistema isolato, l entropia non puo diminuire* . Piu precisamente si ha che:

1. Il grado di disordine del sistema puo aumentare o al piu rimanere costante. In effetti i sistemi isolati tendono al disordine e l entropia e la misura di questo disordine.
2. Nessuna trasformazione naturale puo portare ad una riduzione del disordine, dunque l entropia dell universo aumenta in tutte le trasformazioni spontanee.
3. Di conseguenza saranno irreversibili le trasformazioni che aumentano l entropia dell universo e sono reversibili solo le trasformazioni in cui non si avra variazione di entropia.
4. Inoltre la variazione di entropia di un sistema dipende soltanto dallo stato di equilibrio iniziale e finale.

$\boxed{\Delta S = 0}$ **Trasformazione reversibile**

$\boxed{\Delta S > 0}$ **Trasformazione irreversibile**

- VARIAZIONE DI ENTROPIA (formula di Clausius): in una trasformazione reversibile la variazione di entropia tra due stati di equilibrio e data dalla quantita di calore scambiato diviso la temperatura (°K) del sistema durante la trasformazione.

$\boxed{dS = dQ/T}$ **Variazione di entropia in una trasformazione reversibile**

Per una trasformazione finita (una trasformazione reversibile cioe di cui conosciamo gli stati iniziale e finale) integrando dS tra questi estremi otteniamo la seguente espressione:

$\boxed{\Delta S = \int_i^f (dQ/T)}$ **Variazione di entropia in una trasformazione reversibile finita**
Questo valore (vedi punto 4) e lo stesso per ogni cammino reversibile tra *i* ed *f*

Per calcolare la variazione di entropia in una generica trasformazione useremo ora tutte le risorse della termodinamica. Si consideri un gas perfetto che subisce una trasformazione quasi statica e reversibile tra lo stato iniziale $T_i ; V_i$ e quello finale $T_f ; V_f$.

$dQ = dU + dW$ (dal I Principio della Termodinamica) *nella quale sappiamo che...*

$dW = P\,dV$

$dU = nc_v dT$ $P = nrT/V$

eseguendo tutte le sostituzioni otteniamo:

$dQ = n\,c_v\,dT + n\,r\,T\,dV/V$ *...da cui, dividendo tutto per* T, *si avra :*

$$\frac{dQ}{T} = n\,c_v \frac{dT}{T} + n\,r \frac{dV}{V}$$

notare che l integrale del primo termine tra gli intervalli della trasformazione e proprio $\int_i^f (dQ/T) = \Delta S$
Considerando c_v *costante e integrando otteniamo quindi...*

$$\boxed{\Delta S = n\,c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + n\,r \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

Formula generale per la variazione di entropia

♣ Questa formula e la piu generale e puo essere usata nella maggior parte dei casi

Per una espansione libera (T = costante) la precedente si riduce a:

$$\boxed{\Delta S = n\,r \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

Variazione di entropia in un espansione libera

Nel caso di mescolamento di due sostanze, la variazione di entropia sara data dalla somma:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_1}{T} + \int_i^f \frac{dQ_2}{T}$$

...da cui si ottiene facilmente:

$$\boxed{\Delta S = m_1\,c_1 \ln \frac{T_f}{T_1} + m_1\,c_1 \ln \frac{T_f}{T_2}}$$

Variazione di entropia in un processo di mescolamento

Uso corretto di questi appunti:

00 - ARGOMENTO
Introduzione all argomento con breve spiegazione generale del tema in esame.

Argomento Specifico

- LEGGE O TEOREMA:

enunciato e spiegazione del significato. Eventuale dimostrazione:

$A = B \cdot C^2$ (formula applicata)
$C = V_{luce}$ *spiegazione del calcolo...*

$\boxed{\mathbf{E} = MC^2}$ **Formula ottenuta**

♣ Ulteriore chiarimento o suggerimento.

E chiaro che sui libri di testo il programma di Fisica 1 per scienze geologiche e esposto molto piu in dettaglio, con completezza e competenza. Qui pero c e il succo dell esame e, sostanzialmente, tutta la fisica che potra servire poi negli esami successivi. E dunque un buon aiuto per il ripasso ma anche per capire i concetti meno chiari.
Il vantaggio di questi appunti infatti e che sono abbastanza sintetici, poco astratti nei concetti e soprattutto non sono scritti in matematichese stretto e quindi risulteranno un po piu vicini allo stato d animo dello studente di geologia (almeno, questa e stata l intenzione che li ha fatti nascere).
Passo dopo passo ogni formula, anche gia nota, e indicata con il suo nome ed ogni passaggio matematico, anche se banale, viene spiegato. L architettura standard che si e cercato di realizzare (nella misura in cui era possibile) e illustrata nel piccolo schema qui a lato: utilizza simboli, parentesi e formati di carattere (maiuscolo, neretto, corsivo) con significati propri ben precisi. Ma anche senza tentare di carpire a priori un oscura logica grafica, nel corso dello studio verra spontaneo e facile interpretare il senso del discorso anche quando le spiegazioni verbali saranno molto esigue.

APPENDICE

Unita di misura

Cal dyne l Atm °C

$\longrightarrow$

J N m^3 Pa °K m Kg sec **SI**

$\longrightarrow$

cm g sec **CGS**

Trasformazioni

$1\ m^3 = 1000\ l$

$1\ l = 10^{-3}\ m^3$

$1\ Atm = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$

$1\ Pa = 1\ N/m^3$

$Km/h \cdot 0{,}28 = m/sec$

$1\ cal = 4{,}186\ J$

$giri/min \cdot 2\pi/60 = rad/sec$

$1\ giro = 360^{grad} = 2\pi^{rad}$

$rad = \pi/180\ grad$

$1\ rad \approx 57{,}3°$

$pendenza\ \% = Tg\ \alpha \cdot 100$

$\alpha = arcTg\ (pendenza\ \% / 100)$

$°K = °C + 273$

INDICE